

Résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues

Résoudre un problème à 2 inconnues

Pour résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues, ils existent trois méthodes. Par exemple, résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ 3x - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

Les trois méthodes sont :

- Résolution graphique
- Résolutions par combinaison (ou addition)
- Résolution par substitution

Résolution graphique :

Chaque équation du système est formée de 2 inconnues x et y, l'écriture d'une droite s'écrit sous la forme $y = ax + b$. Pour obtenir cette forme qui nous permettra de tracer facilement cette droite, il convient de modifier chacune des écritures précédentes.

A partir de (1) $x + y = 5$, on écrit :

$$y = -x + 5$$

A partir de (2) $3x - 2y = 0$, on écrit :

$$-2y = -3x + 0$$

$$y = \frac{-3}{-2}x$$

$$y = \frac{3}{2}x .$$

On obtient alors deux équations de droite conformes à l'écriture $y = ax + b$.

Traçons ces deux droites dans un repère. Pour tracer une droite, il faut et il suffit de déterminer 2 points de cette droite. Prenons en un supplémentaire, il nous permettra de vérifier nos calculs. Chaque point de la droite s'écrit sous la forme $M(x, y)$, M est le nom du point, x est l'abscisse et y l'ordonnée de ce point. Pour trouver les points d'une droite, il suffit de se donner des valeurs de x et de déterminer les valeurs correspondantes de y. Mettons tout cela dans un tableau.

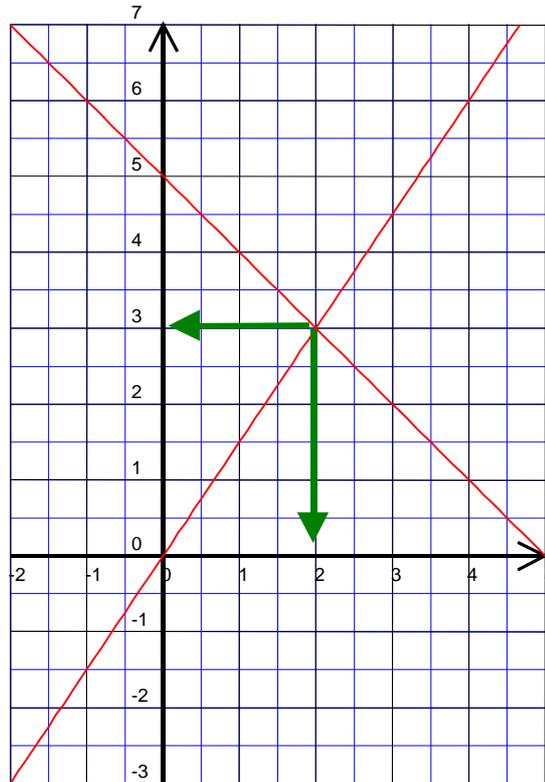
Pour l'équation (1) $y = -x + 5$, on écrit les valeurs de x sur la première ligne et on détermine les valeurs de y correspondantes en remplaçant x par sa valeur dans $-x + 5$.

x	0	2	5
$y = -x + 5$	5	3	0

Pour l'équation (2) $y = \frac{3}{2}x$, on fait la même chose.

x	0	2	4
$y = \frac{3}{2}x$	0	3	6

Traçons ces deux droites dans un repère.



La solution de ce système est en fait le point d'intersection des deux droites qui correspond à une valeur identique de x et de y pour chaque équation. (Attention l'abscisse est toujours donnée en premier.)

$$S = (2 ; 3)$$

Résolution par combinaison (par addition) :

Ce type de résolution consiste à multiplier l'une ou l'autre, voire les deux équations par des coefficients de façon à obtenir un même nombre de x ou un même nombre de y dans chaque équation.

$$\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ 3x - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

Dans ce cas plusieurs possibilités s'offrent à nous :

- On multiplie l'équation (1) par 3. En ayant $3x$ dans chaque équation, il suffira de soustraire l'une des 2 équations à l'autre pour éliminer les x .
- On peut également multiplier l'équation (1) par 2. En ayant $2y$ dans une équation et $2y$ dans l'autre, il suffira d'additionner les 2 équations pour éliminer les y .

Choisissons l'une des 2 possibilités, la première par exemple.

$$\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ 3x - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\times 3$ à $3x + 3y = 15$ (3) On appelle équation 3 l'équation 1 modifiée.

(2) $3x - 2y = 0$

$$(3) - (2) \text{ à } 3x - 3x + 3y - -2y = 15 - 0$$

$$5y = 15$$

$$y = 3$$

On trouve la valeur de y qui vaut 3.

Il suffit maintenant de remplacer y par sa valeur dans l'une ou l'autre des 2 équations pour obtenir x.

Prenons l'équation (1), remplaçons y par 3

$$x + 3 = 5$$

$$x = 5 - 3$$

$$x = 2$$

$$S = (2 ; 3)$$

On trouve la même solution (ce qui est heureux...)

Résolution par substitution :

Ce type de résolution consiste à écrire x en fonction de y (ou y en fonction de x), ce qui permettra en remplaçant la valeur de x (ou la valeur de y) dans l'autre équation d'éliminer x (ou y).

$$\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ 3x - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

En partant de l'équation (1), nous avons deux possibilités.

- La première consiste à écrire x en fonction de y : de (1) $x = -y + 5$, il suffira alors de remplacer x de l'équation (2) par $-y + 5$.

- La deuxième consiste à écrire y en fonction de x : de (1) $y = -x + 5$, il suffira de remplacer y de l'équation (2) par $-x + 5$.

Prenons la première des deux solutions: On remplace x par $-y + 5$ dans l'équation (2).

Dans (2) $3(-y + 5) - 2y = 0$

On développe $-3y + 15 - 2y = 0$

On résoud $-5y + 15 = 0$

$$-5y = -15$$

$$y = \frac{-15}{-5}$$

$$y = 3$$

Il suffit de remplacer y par 3 dans l'une ou l'autre des 2 équations pour trouver x.

Dans (1) on remplace y par 3

$$x + 3 = 5$$

$$x = 5 - 3$$

$$x = 2$$

$$S = (2 ; 3)$$

On trouve une fois de plus la même solution (ce qui est toujours heureux...)

Résoudre un problème à 2 inconnues:

Considérons le problème suivant:

Léa et sa mère ont ensemble 42 ans. Dans 12 ans, Léa aura la moitié de l'âge de sa mère.

Quels sont les âges de Léa et de sa mère ?

