CH XI Calculs algébriques – Transformations de formules

I) Développer – Factoriser :

Rappels : Pour tout réels a, b et c $\quad a(b + c) = ab + ac$

On dit que l'on développe lorsque l'on passe de $a(b + c)$ à $ab + ac$

On dit que l'on factorise lorsque l'on passe de $ab + ac$ à $a(b + c)$

Exemples : Développer $3(2a - 3b + 4c)$ $\quad 3(2a - 3b + 4c) = 6a - 9b + 12c$

Développer $(2x + 3)(x - 4)$ $\quad (2x + 3)(x - 4) = 2x^2 - 8x + 3x - 12$

Dans cet exemple, le calcul n'est pas terminé . Il faut rassembler les termes semblables, on dit qu'on les réduit . $\quad (2x + 3)(x - 4) = 2x^2 - 5x - 12$

Factoriser $5x^2 + x$ $\quad$ Factoriser, c'est chercher un terme commun aux deux membres, dans ce cas le terme commun est x $\quad 5x^2 + x = x(5x + 1)$

Exercice : Développer et réduire les expressions suivantes .

$5(2a - 3) =$	$3(3a + 1) =$
$\frac{3}{2}\left(\frac{a}{3} + \frac{1}{3}\right) =$	$\frac{2}{5}(10a - 15) =$
$3x(x - 2) =$	$x(2x + 1) =$
$a(2a - 3) =$	$3a(-2a + 5) =$
$(x + 1)(x + 2) =$	$(3x + 2)(2x - 1) =$
$(-x + 3)(x - 1) =$	$(7x - 2)(1 - x) =$
$\left(\frac{1}{4}x - 2\right)\left(\frac{1}{4}x - 7\right) =$	$(3x - 1)(\frac{1}{3}x + 4) =$

Exercice : Factoriser

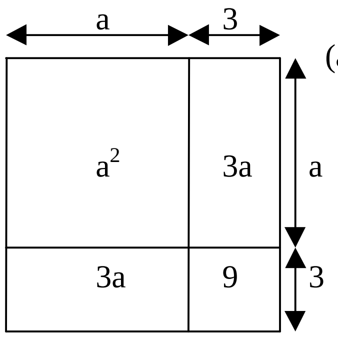
$4a + 4b =$	$3a + 12b =$
$2a - 6b + 8c =$	$x^2 + 2x =$
$8x + x^2 =$	$x^2 + 5x =$
$3x^2 - 7x^3 =$	$6ax^2 - 12a^2x =$

II) Les égalités remarquables :

Certains calculs sont plus évidents que d'autres, en effet :

1) Carré d'une somme :

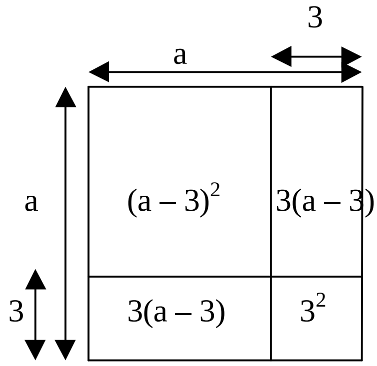
Calculons $(a + 3)^2$, pour cela effectuons un dessin .



$$(a + 3)^2 = a^2 + 3a + 3a + 9$$
$$= a^2 + 6\,a + 9$$

2) Carré d'une différence

Calculons $(a - 3)^2$, effectuons un autre dessin .



$(a - 3)^2 =$
$a^2 - 3(a - 3) -$
$3(a - 3) - 3^2$
$=$
$a^2 - 6a + 9$

3) Produit d'une somme par une différence .

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Les identités remarquables qu'il faudra bien connaître seront :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ces égalités nous permettront d'effectuer des calculs qui pourraient paraître complexes .

Exemple :Développer, réduire et ordonner une expression .

$$A = (3x + 5)^2 + (2x - 3)^2 - (5x - 1)(5x + 1) + (x - 3)(x + 2) =$$

a) on développe $\quad A = (9x^2 + 30\,x + 25) + (4x^2 - 12x + 9) - (25x^2 - 1) + (x^2 + 2x - 3x - 6)$

b) on réduit et on rassemble les termes semblables .

$$A = 9x^2 + 30\,x + 25 + 4x^2 - 12x + 9 - 25x^2 + 1 + x^2 + 2x - 3x - 6$$
$$A = -11\,x^2 + 17\,x + 29$$

Notons que l'on prendra l'habitude de classer ces termes dans l'ordre des puissances décroissantes de x.

Exercice : Mettre sous forme d'un carré

$x^2 + 2x + 1 =$	$x^2 + 4x + 4 =$	$x^2 - 4x + 4 =$
$x^2 + 8x + 16 =$	$x^2 - 8x + 16 =$	$4x^2 - 4x + 1 =$

Exercice : Factoriser

$4a^2 - 1 =$	$4a^2 - 4 =$	$4a^2 - 9 =$
$a^2 - 4b^2 =$	$100x^2 - 1 =$	$25x^2 - 16 =$
$a^2 - 100 =$	$0{,}01a^2 - 1 =$	$4x^4 - 9y^2 =$

III) Les polynômes :

$A(x) = 2x - 3$; $B(x) = 3x^2 - 4x + 7$; $C(x) = 6x^3 - 1$ et $D(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x - 5$ sont des polynômes .

Un polynôme est caractérisé par :
- La lettre x qui représente un nombre réel
- Son degré qui est le plus grand exposant de x

A(x) est de degré 1 ; B(x) est de degré 2 ; C(x) est de degré 3 et D(x) est de degré 4 .
Pour définir le degré d'un polynôme, on dira que C(x) est du troisième degré .

On peut calculer la valeur d'un polynôme en écrivant par exemple B(2). B(2) est la valeur du polynôme pour x = 2 .
$B(2) = 3(2)^2 - 4(2) + 7 = 12 - 8 + 7 = 11$

On peut additionner des polynômes . Calculons C(x) + D(x)
$C(x) + D(x) = 6x^3 - 1 + 4x^4 + 3x^3 - 2x - 5 = 4x^4 + \underbrace{6x^3 + 3x^3} - 2x \underbrace{-1 - 5} = 4x^4 + 9x^3 - 2x - 6$.

On peut multiplier des polynômes . Calculons A(x) . B(x) (On utilisera la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)

$A(x) . C(x) = (2x - 3) . (6x^3 - 1) = 12x^4 - 2x - 18x^3 + 3 = 12x^4 - 18x^3 - 2x + 3$

Lorsque l'on multiplie un polynôme de degré b par un polynôme de degré c, on obtient un polynôme de degré b + c .

Le rapport de deux polynômes $\frac{A(x)}{C(x)}$ est une fraction rationnelle .Parfois, il est possible de simplifier des fractions rationnelles .

$E(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x} = \frac{x(x-2)}{x(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$ (pour $x \neq 0$)

<u>Exercice :</u>On donne les polynômes $A(x) = 4x^2 - 3x + 5$; $B(x) = - x^2 + 6x - 7$ et $C(x) = 3x^2 - 3x - 9$

Calculer A(x) + B(x) + C(x) =
A(x) – B(x) + C(x) =
-A(x) + B(x) - C(x) =
2A(x) + B(x) - C(x) =
A(x) – 2B(x) - C(x) =
-3A(x) + 2B(x) + C(x)

$A(x).B(x) =$

<u>Exercice :</u> Soit le polynôme $P(x) = 9(-x + 2)^2 + 5(2x - 3)(-x + 2)$

a) Développer, réduire et ordonner $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x

b) Factoriser $P(x)$

c) Calculer $P(0) =$ $P(-1) =$

<u>Exercice :</u> Soient les polynômes $P(x) = (2x + 5)^2 - (x + 3)^2$ et $Q(x) = (x + 2)(2x - 1) - (x + 2)(x - 5)$

a) Développer, réduire et ordonner $P(x)$ et $Q(x)$

$P(x) =$

$Q(x) =$

b) Calculer $P(-\frac{1}{2})$ valeur prise par $P(x)$ quand $x = -\frac{1}{2}$

$P(-\frac{1}{2}) =$

c) Factoriser $P(x)$ et $Q(x)$

$P(x) =$

$Q(x) =$

d) Calculer $Q(1 - \sqrt{3})$ valeur prise par $Q(x)$ quand $x = 1 - \sqrt{3}$.

$Q(1 - \sqrt{3}) =$

Sachant que $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ donner un encadrement de $Q(1 - \sqrt{3})$

$< Q(1 - \sqrt{3}) <$

<u>Exercice :</u> On donne $F = (3x - 2)^2 - 9$

a) Calculer la valeur exacte de F pour $x = \sqrt{2}$ (Donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{2}$ ou a et b sont des entiers relatifs).

$F(\sqrt{2}) =$

b) Factoriser F $F =$

<u>Exercice :</u> on donne $E = (3x - 5)^2 - (3x - 5)(x + 2)$

a) Développer et réduire E E =

b) Calculer E pour x = $\frac{7}{2}$ et x = $\sqrt{2}$

c) Factoriser E E =

IV) Transformation de formules :

Signification	Formule	Formule transformée
Aire du disque de rayon R	S = p R^2	R^2 = R =
Aire du triangle	S = $\frac{ah}{2}$	2S = h =
Volume d'une pyramide	V = $\frac{1}{3}$Bh	3V = B =
Volume du cône de révolution de hauteur h	V = $\frac{1}{3}$p $R^2 h$	3V = h =
Volume de la boule	V = $\frac{4}{3}$p R^3	3V = R =
Résistance d'un conducteur	R = r $\frac{l}{s}$	Rs = S =
Résistances en parallèles	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$	$\frac{1}{R} =$ R =
Période d'un pendule	$T = 2$p$\sqrt{\frac{l}{g}}$	T^2 = gT^2 = g =

Aire latérale du cylindre	A = 2p Rh	R = h =
Volume du cylindre	V = p $R^2 h$	h = R =
Puissance d’un récepteur	P = U I	U = I =