

## CH V Statistique II : Caractéristiques de position et de dispersion

### I) Les caractéristiques de position :

Les caractéristiques de position sont des données importantes pour l'étude des séries statistiques.

#### 1) Le mode d'une série statistique :

Le mode est la valeur de la variable (ou de la classe) correspondant au plus grand effectif ou à la plus grande fréquence.

##### a) Recherche du mode lorsque la variable est discrète :

L'étude statistique porte sur le population des frères et des sœurs inscrits dans un L.P.

Nombre de frères et sœurs $x_i$	Nombre d'élèves $n_i$
Aucun	72
1	148
2	102
3	65
4	51
Plus de 4	62
	500

Pour trouver le mode, il suffit de repérer la variable qui a le plus grand effectif. Ici le mode de la série est 1.

##### b) Recherche du mode lorsque la variable est continue :

L'étude statistique porte sur le montant des achats effectués par 150 clients dans une boulangerie.

Montant des achats en € $x_i$	Nombre de clients $n_i$
]0 ; 2]	23
]2 ; 4]	32
]4 ; 6]	38
]6 ; 8]	19
]8 ; 10]	24
]10 ; 12]	8
]12 ; 14]	6
	150

On repère la classe qui est affectée du plus grand effectif. Ici la classe modale de la série est ]4 ; 6].

## 2) La médiane d'une série statistique :

La médiane d'une série statistique ordonnée est la valeur de la variable telle qu'il y ait dans cette série autant de valeurs inférieures que de valeurs supérieures.

### a) Recherche de la médiane lorsque la variable est discrète :

L'étude statistique porte sur le prix de vente d'un même article dans 9 magasins différents.

100	93	89	107	112	110	115	96	105
-----	----	----	-----	-----	-----	-----	----	-----

On ordonne les N valeurs de cette série de façon croissante ou décroissante, si N est impair, la médiane est la valeur qui occupe le rang central.

Rangement :

89	93	96	100	105	107	110	112	115
----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

La médiane ici est donc 105.

Si N est pair, la médiane est égale à la moyenne entre la valeur de rang  $\frac{N}{2}$  et celle de rang  $\frac{N}{2} + 1$ .

S'il y a 10 magasins par exemple

89	93	96	100	105	107	110	112	115	118
----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

La médiane serait  $\frac{105 + 107}{2} = 106$ .

### b) Recherche de la médiane lorsque la variable est continue :

L'étude statistique porte sur l'ancienneté du personnel d'une banque.

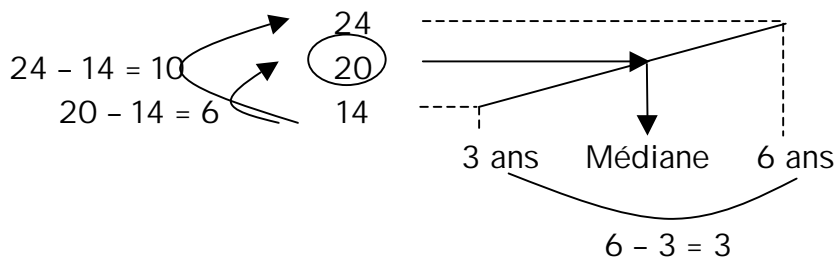
Nombre d'années	]0 ; 3]	]3 ; 6]	]6 ; 9]	]9 ; 12]	]12 ; 15]
Nombre d'employés	14	12	8	4	2

On détermine d'abord la série cumulée des effectifs croissants.

Nombre d'années	]0 ; 3]	]3 ; 6]	]6 ; 9]	]9 ; 12]	]12 ; 15]
Nombre d'employés	14	10	8	6	2
Effectifs cumulés croissants	14	14 + 10 = 24	24 + 8 = 32	32 + 6 = 38	38 + 2 = 40

L'effectif total étant 40, la médiane se situe au rang  $20 = \frac{40}{2}$ . On détermine de ce fait la classe médiane comme étant ]3 ; 6].

En supposant que les 12 valeurs sont régulièrement réparties dans celle-ci, la classe ayant comme amplitude  $6 - 3 = 3$ . Chaque valeur serait à une distance de la précédente égale à  $\frac{3}{12}$



Médiane = 3 ans +  $\frac{6}{10} \times 3 = 4,8$  ans soit 4 ans +  $0,8 \times 12 = 4$  ans et 9,6 mois soit 4 ans 9 mois et  $0,6 \times 30$  jours soit 4 ans 9 mois et 18 jours.

### c) Recherche graphique de la médiane :

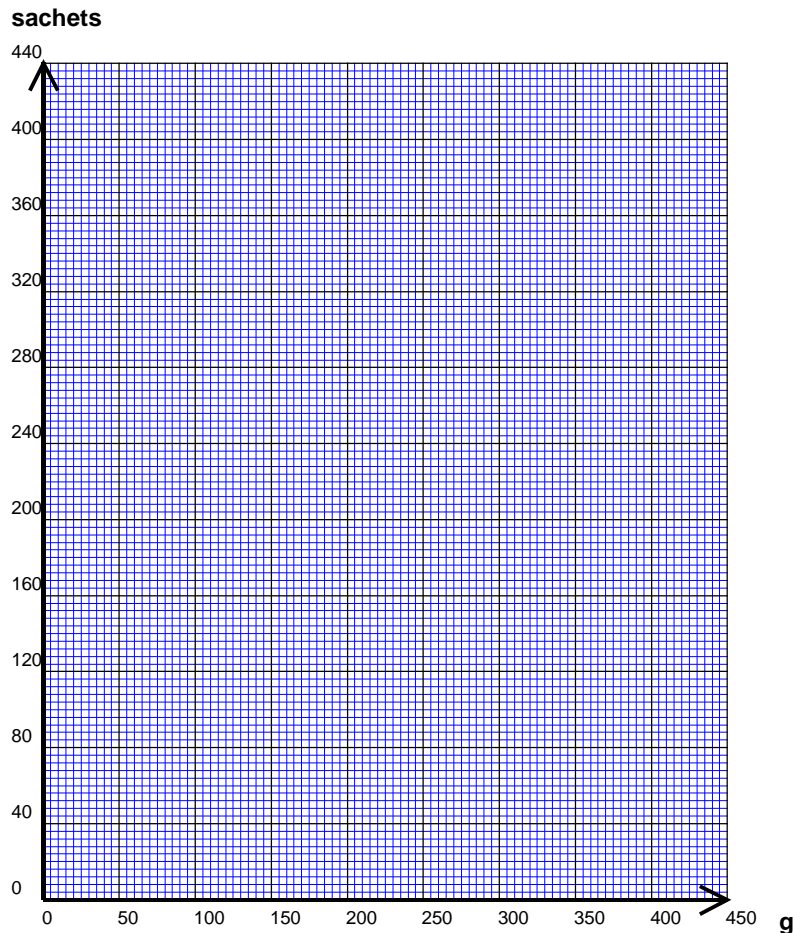
L'étude statistique porte le poids des sachets de bonbons achetés dans un magasin libre service.

Poids des sachets en g	Nombres de sachets	E.C.C.	E.C.D.
]0 ; 50]	20		
]50 ; 100]	70		
]100 ; 150]	140		
]150 ; 200]	70		
]200 ; 250]	60		
]250 ; 300]	30		
]300 ; 350]	10		
	400		

On trace les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

- Pour tracer le polygone des effectifs cumulés croissants, on reporte les points ayant pour abscisse la borne supérieure de la classe et pour ordonnée l'effectif cumulé croissant.

- Pour tracer le polygone des effectifs cumulés décroissants, on reporte les points ayant pour abscisse la borne inférieure de la classe et pour ordonnée l'effectif cumulé décroissant.



L'intersection des deux courbes définit un point dont l'abscisse correspond à la médiane. En traçant une seule courbe, il est également possible d'obtenir la médiane en traçant une droite horizontale correspondant à 50 % de l'effectif total. L'intersection de cette droite et de l'une des deux courbes précédentes définit le même point dont l'abscisse correspond à la médiane.

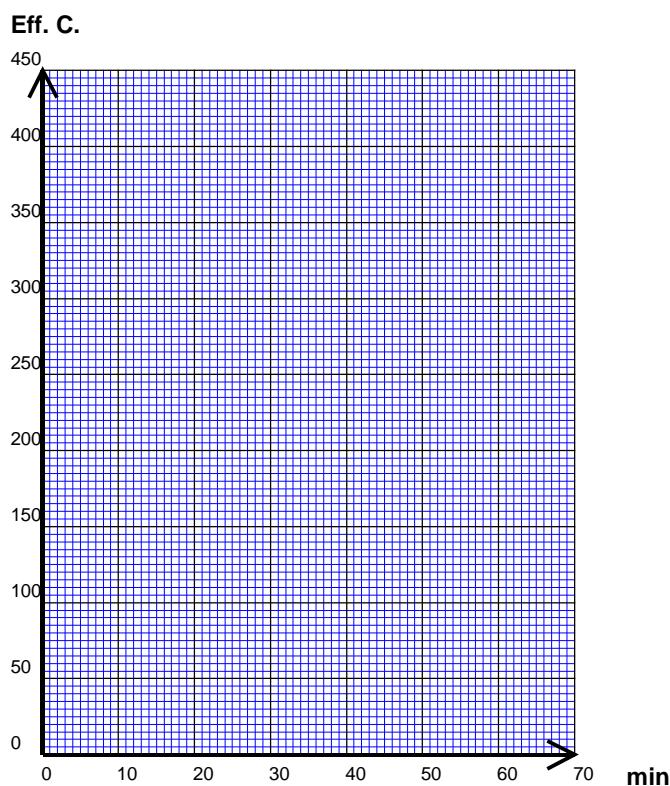
On obtiendra les mêmes résultats en traçant les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

Interprétation de la médiane : La moitié des sachets de bonbons pèse moins de 140 g, et l'autre moitié pèse plus de 140 g.

**Exercice N°1 :** Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves suivant leur durée de trajet.

Durée (en min)	Effectif		
[0 ; 10[	50		
[10 ; 20[	100		
[20 ; 30[	150		
[30 ; 60[	100		

- a) Calculer les effectifs cumulés
- b) Combien d'élèves mettent moins de 20 min pour se rendre au Lycée ?
- c) Tracer le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants.



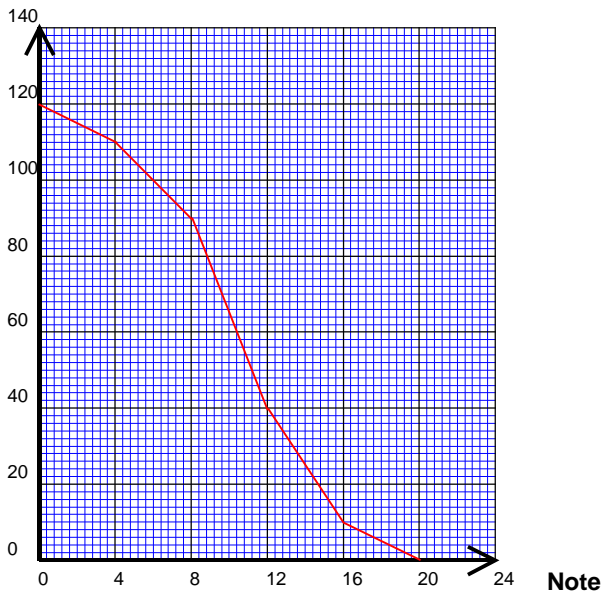
- d) Définir la médiane.

**Exercice N°2 :** Les résultats d'une épreuve de BEP blanc ont permis de tracer le polygone des effectifs cumulés décroissants.

- a) A partir de la courbe des E.C.D. , établir le tableau statistique correspondant en indiquant les effectifs et les fréquences (arrondies à 1% près).
- b) Quel est le pourcentage d'élèves qui ont 8 ou plus de 8 ?

- c) Quel est le pourcentage d'élèves qui ont moins de 12 ?  
 d) Déterminer graphiquement la médiane de cette série statistique et donner sa signification.

**E.C.D.**



Note	Effectif $n_i$	Fréquence (%)

3) La moyenne d'une série statistique :

a) Moyenne simple :

Le responsable d'un rayon photo veut connaître le prix moyen de 8 appareils.

Modèle	A	B	C	D	E	F	G	H
Prix de vente	149	450	227	310	515	399	189	237

Prix moyen =

b) Moyenne pondérée :

On veut calculer la moyenne d'un contrôle pour 10 élèves.

Note $x_i$	Effectif $n_i$	Produits $n_i \cdot x_i$
6	2	
12	2	
13	3	
15	2	
17	1	
	10	

Moyenne =

c) Moyenne d'une série à variable continue :

Le CPE d'un L.P. a lancé une enquête pour connaître la durée moyenne du trajet d'un élève.

Durée en min	Nombre d'élèves $n_i$	Centre de classe $x_i$	Produit $X_i.n_i$
[0 ; 10[	12		
[10 ; 20[	60		
[20 ; 30[	156		
[30 ; 40[	112		
[40 ; 50[	42		
[50 ; 60[	20		
[60 ; 70[	2		

Durée moyenne du trajet (arrondir au centième) =

Exercice N°3 : Le service de maintenance d'une entreprise industrielle a relevé la durée de fonctionnement avant intervention de 80 machines.

Les résultats sont les suivants :

Nombre d'heures	Effectif $n_i$	Centre de classe $x_i$	Produits $n_i.x_i$
[0 ; 100[	4		
[100 ; 200[	23		
[200 ; 300[	30		
[300 ; 400[	17		
[400 ; 500[	6		
	80		

- Compléter le tableau précédent.
- Calculer la durée moyenne de fonctionnement des machines avant intervention du service de maintenance.

II) Les caractéristiques de dispersion :

Dans une série statistique, les caractéristiques de dispersion sont :

- l'écart moyen
- l'écart type

### 1) L'écart moyen :

L'écart moyen est la moyenne arithmétique des écarts, en valeur absolue, entre les valeurs et la moyenne de la série.

Exemple : Soit la série statistique regroupant les notes obtenues lors d'un BEP blanc par une classe. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant , compléter ce tableau et calculer la moyenne.

Notes	Effectif $n_i$	Centre de classe $x_i$	$n_i \cdot x_i$
[0 ; 4[	4		
[4 ; 8[	6		
[8 ; 12[	8		
[12 ; 16[	4		
[16 ; 20[	2		
	24		

$\bar{X} =$

Pour calculer l'écart moyen, il faut rajouter au tableau précédent deux colonnes.

Notes	Effectif $n_i$	Centre de classe $x_i$	$ x_i - \bar{X} $	$n_i \cdot  x_i - \bar{X} $
[0 ; 4[	4			
[4 ; 8[	6			
[8 ; 12[	8			
[12 ; 16[	4			
[16 ; 20[	2			
	24			

$$\text{L'écart moyen } e = \frac{\sum n_i \cdot |x_i - \bar{X}|}{N}$$

e =

Plus un écart moyen est petit (proche de 0), plus les valeurs du caractère sont proche de  $\bar{X}$ .

### 2) L'écart type :

Pour calculer l'écart type  $S$  , il faut d'abord calculer la variance  $V$ .



A partir de la série statistique précédente, il convient de compléter le tableau suivant :

Notes	Effectif $n_i$	Centre de classe $x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} ^2$	$n_i \cdot  x_i - \bar{x} ^2$
[0 ; 4[	4				
[4 ; 8[	6				
[8 ; 12[	8				
[12 ; 16[	4				
[16 ; 20[	2				
	24				

$$V = \frac{\sum n_i \cdot |x_i - \bar{x}|^2}{N} \quad S = \sqrt{V}$$

Plus un écart type est petit (proche de 1), plus les valeurs du caractère sont proche de  $\bar{x}$ .

**Exercice :** La consommation d'eau annuelle de 200 familles d'un même immeuble est donnée dans le tableau suivant qu'il faut compléter pour obtenir la moyenne.

Consommation (en m <sup>3</sup> )	Effectif $n_i$	Centre de classe $x_i$	$n_i \cdot x_i$
[0 ; 50[	21		
[50 ; 100[	45		
[100 ; 150[	107		
[150 ; 200[	27		
	200		

$$\bar{x} =$$

Calculer l'écart type de cette série statistique.

Consommation $n$ (en m <sup>3</sup> )	Effectif $n_i$	Centre de classe $x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} ^2$	$n_i \cdot  x_i - \bar{x} ^2$
[0 ; 50[	21				
[50 ; 100[	45				
[100 ; 150[	107				
[150 ; 200[	27				
	200				

$$V =$$

$$S =$$