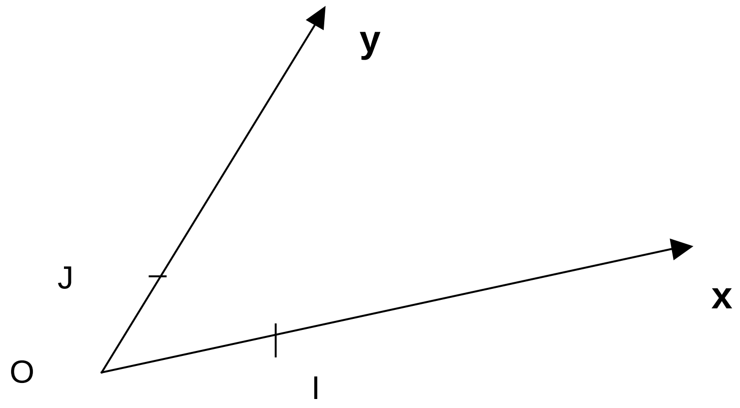
CH V Fonctions linéaires – Fonctions affines – Équation d'une droite

I) Les repères du plan :

1) Les repères du plan :

a) Repère quelconque :

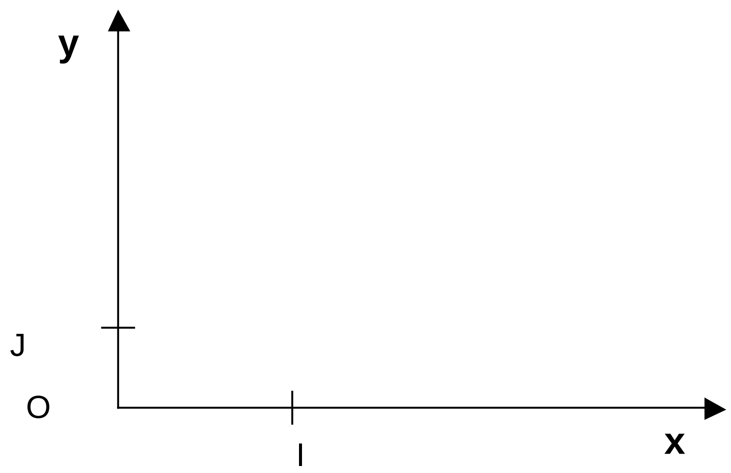
Un repère est constitué de deux axes ayant une même origine.



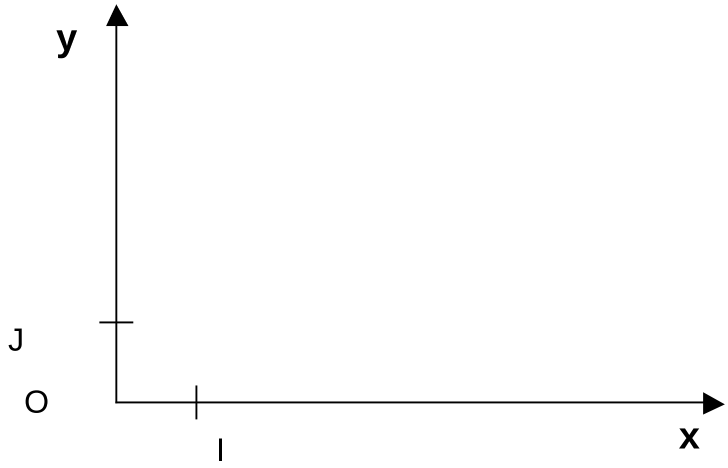
Le repère est noté (O,x,y) ou (O,I,J)

b) Repère orthogonal :

Dans un repère orthogonal, les axes (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.



c) Repère orthonormal :



Dans un repère orthonormal, les axes (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et OI = OJ.

2) Les coordonnées d'un point :

Dans un repère (O,I,J), tout point M du plan est caractérisé par son abscisse x_M et son ordonnée y_M. On note M(x_M ; y_M)

II) Notion de fonction :

1) Définition : Une fonction numérique est une relation qui a un nombre x fait correspondre au plus un nombre y. (Au plus signifie 1 ou 0)

2) Notation : Si la fonction est notée f, on écrit

$f : x \longrightarrow y$

x est la variable

y est l'image de x

On note y = f(x)

3) Ensemble de définition :

Si x appartient à un ensemble ou à un intervalle, cet intervalle ou cet ensemble est appelé intervalle de définition (ou ensemble de définition).

4) Exemple :

Soit la fonction f qui à une vitesse v fait correspondre une distance de sécurité d.

On écrit $f : v \longrightarrow d$

Cette fonction est définie sur l'intervalle [0 ; 140] par l'expression

$$f(v) = 0{,}003v^2 + 0{,}2v + 8$$

Son ensemble de définition ou domaine de définition sera noté D_f

$$D_f = [\ 0\ ;\ 140\ ]$$

5) Représentation graphique :

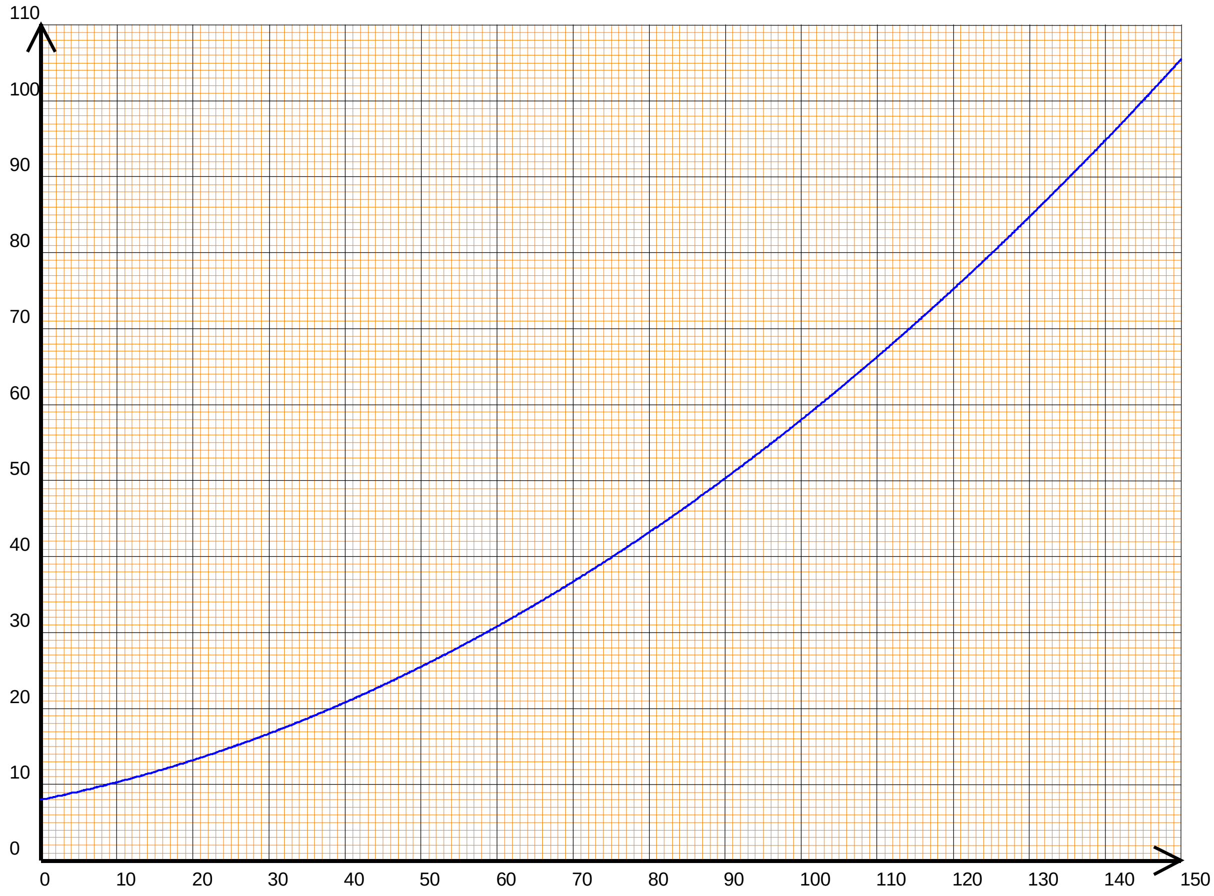
Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées (v ; f(v)).

On recherche dons des couples de valeur (v ; d) tels que d = f(v).
Ces valeurs peuvent être représentées dans un tableau.

v	0	20	40	60	80	100	120	140
$d = 0{,}003v^2+0{,}2v+8$	8	13,2	20,8	30,8	43,2	58	75,2	94,8

On place les points de coordonnées (v ; d) dans un repère.
On relie ces points pour obtenir une courbe continue (courbe qui peut être une droite si les points sont alignés).

La courbe ainsi obtenue est appelée « courbe représentative » ou « représentation graphique ».



III) Fonction linéaire :

1) Définition :

Si a est un réel non nul, la fonction f définie sur R par f(x) = ax est appelée fonction linéaire de coefficient a.

2) Représentation graphique :

Exemple : Soit f la fonction linéaire définie sur [-5 ; 5], telle que f(x) = 1,5x
Compléter le tableau suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)											

Reporter tous les point (x ; f(x)) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

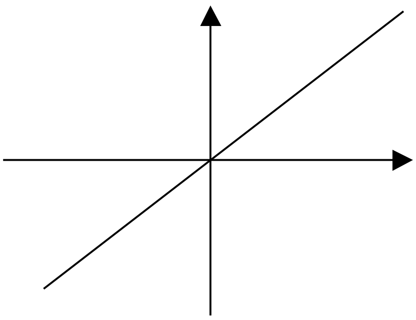
Joindre les points, conclusion.

La représentation graphique d'une fonction linéaire f : x à ax est une droite passant par l'origine du repère. Une fonction linéaire représente une situation de proportionnalité.

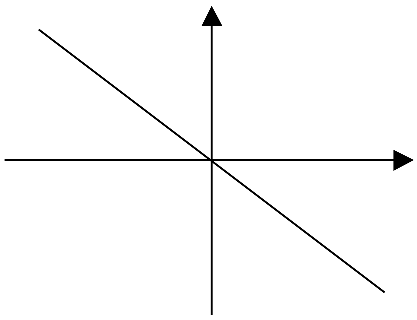
3) Équation de la droite représentant une fonction linéaire :

L'équation d'une telle droite est y = ax, a est appelé le coefficient directeur de la droite.

Si a > 0, la fonction est croissante



Si a < 0, la fonction est décroissante



Pour tracer une droite représentant une fonction linéaire, il suffit de choisir une valeur de x telle que x $\neq$ 0, de calculer son image. La droite passera par les points O(0 ; 0) et A(x ; f(x)).

Exercice : Représenter graphiquement la fonction définie sur [-2 ; 2] par f(x) = -2x.
Donner l'équation de la droite représentant cette fonction.

Exercice : Une fonction linéaire f est telle que f(2) = 3. Déterminer son coefficient directeur. Calculer les images de 7 et –3.

Exercice : Soient les points O(0 ; 0) ; A(2 ; 3) ; B(-2 ; -3) ; C(3 ; 2) et D(2 ; -3). Quels sont les points qui appartiennent aux représentations graphiques de f définies dans le tableau suivant. Cocher les cases.

	O(0 ; 0)	A(2 ; 3)	B(-2 ; -3)	C(3 ; 2)	D(2 ; -3)
$f(x) = \frac{3}{2}x$					
f(x) = -3x					
$f(x) = \frac{2}{3}x$					
f(x) = 1,5 x					

IV) Fonction affine :

1) Définition :

Soient a et b deux réels donnés, la fonction définie sur R par f(x) = ax + b est une fonction affine.

Exemple : Soit la fonction affine définie par f(x) = 2x – 1. Dans ce cas a vaut 2 et b vaut –1

Cas particulier : Si b = 0, la fonction est linéaire.

2) Représentation graphique :

Soit f la fonction définie sur [-5 ; 5] par f(x) = 2x – 1. Compléter le tableau suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)											

Reporter tous les point (x ; f(x)) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Joindre les points, conclusion.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite ne passant pas par l'origine du repère.

3) Équation de la droite représentant la fonction affine :

L'équation d'une telle droite est y = ax + b. a est le coefficient directeur de la droite et b est l'ordonnée à l'origine.

Exercice : Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, tracer les droites :

D_1 : y = 2x – 1 D_2 : y = 2x + 2   D3 : y = -0,5x + 2

4) Recherche d'une équation de droite :

a) On connaît le coefficient directeur et les coordonnées d'un point de la droite :

Exemple : Recherchons l'équation de la droite passant par A(5 ; 2) et de coefficient directeur a = - 0,25.

L'équation générale de la droite est $y = ax + b$

On peut donc écrire $y = -0,25x + b$

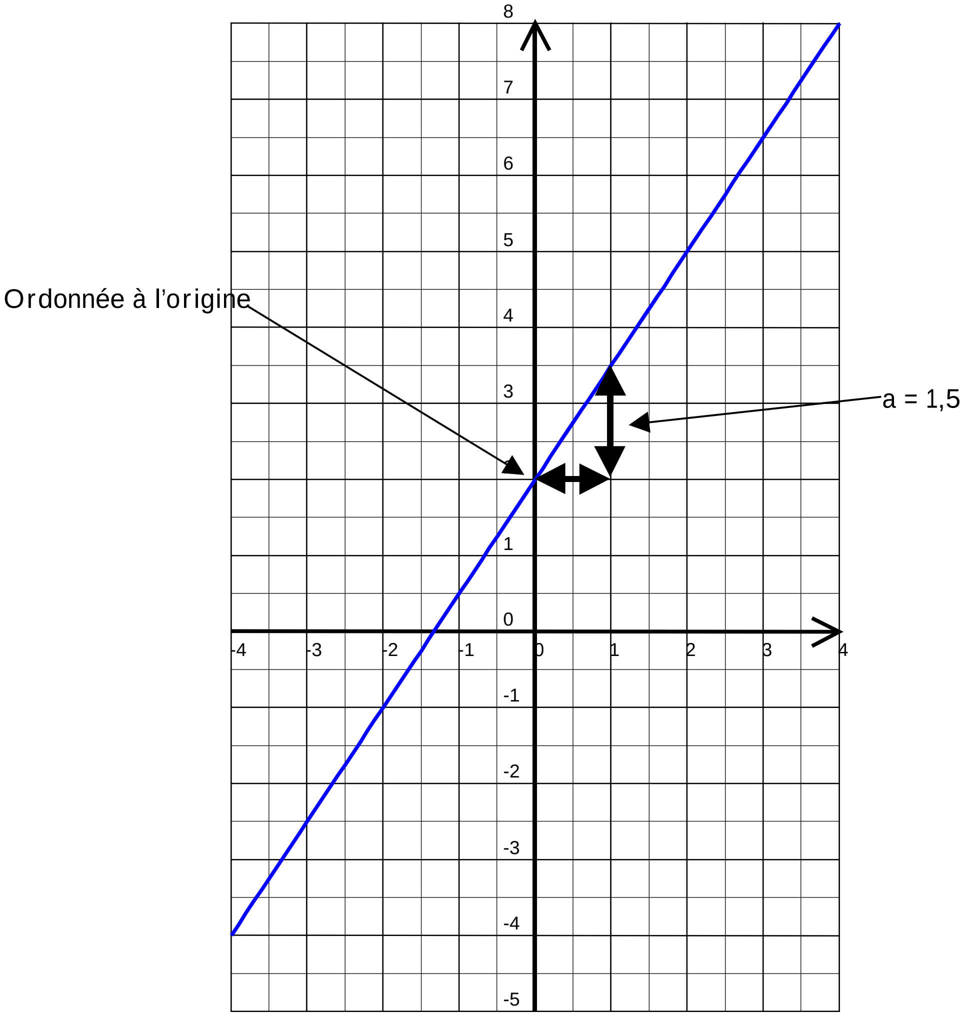
Puisque la droite passe par le point A, remplaçons x par 5 et y par 2

$$2 = -0,25 \times 5 + b$$
$$b = 2 + 1,25$$
$$b = 3,25$$

La droite a pour équation $y = -0,25x + 3,25$

b) On connaît deux points de la droite :

Exemple : Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm , placer les points A(-2 ; -1) et B(2 ; 5)
Tracer la droite passant par A et B, donner une équation de cette droite.



Méthode 1 : Par le calcul.

On obtient le coefficient directeur en calculant $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$\dfrac{5 - (-1)}{2 - (-2)} = \dfrac{5}{4} = 1{,}5$ L'équation de la droite est y = 1,5x + b et passe par le point A.

$-1 = 1{,}5 \times (-2) + b$
$-1 = -3 + b$
$b = 2$ L'équation est donc y = 1,5x + 2

Méthode 2 : graphiquement.

On mesure sur le graphique l'évolution de y lorsque x augmente de 1. Cette évolution correspond au coefficient directeur a. b se lit en prenant l'ordonnée à l'origine.

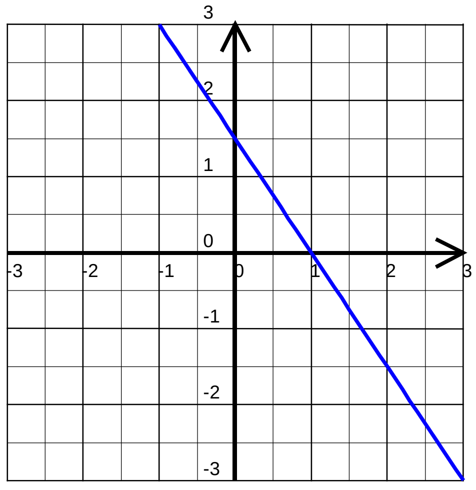
Lorsque x augmente de 1, y augmente de 1, 5 a = 1,5
L'ordonnée à l'origine est 2 b = 2

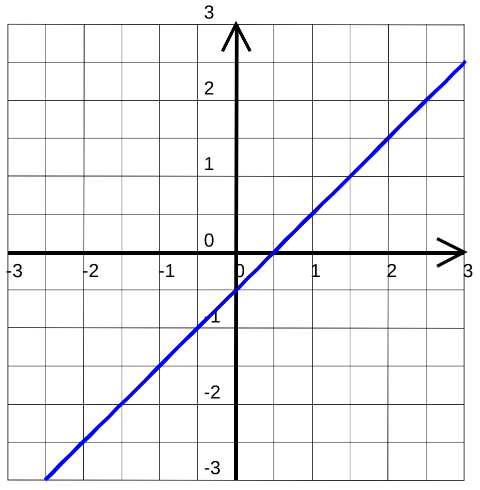
La droite a pour équation y = 1,5x + 2.

Exercice : Déterminer les équations de droite des fonctions affines dont la représentation graphique passe par les points :

a) A(2 ; -1) B(5 ; 2)
b) A(-1 ; 2) B(3 ; 5)
c) A(-2 ; -3) B(2 ; 3)
d) A(-1 ; 4) B(3 ; 4)

Exercice : Déterminer l'équation y = ax + b des fonctions affines dont les représentations graphiques sont :

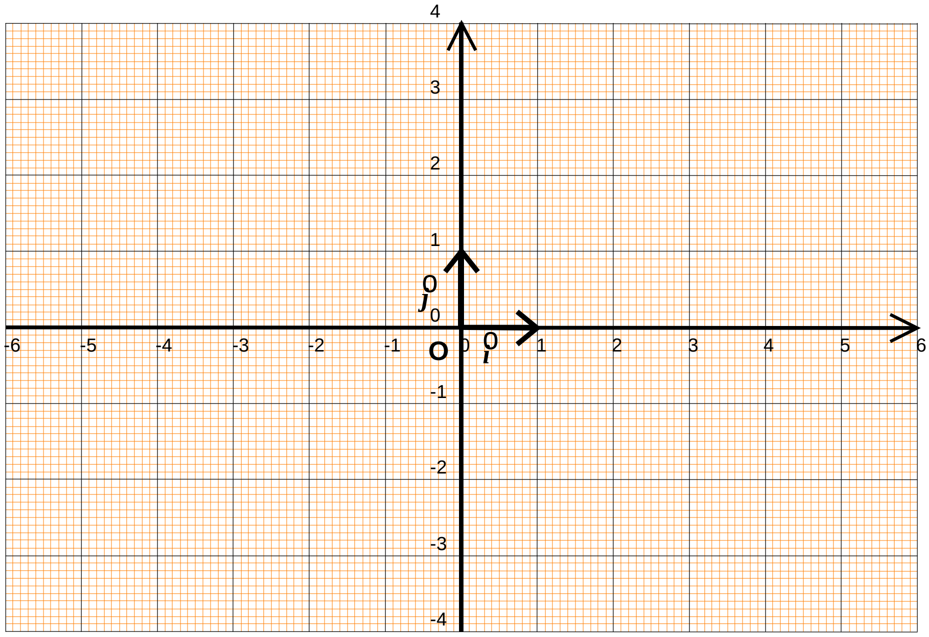




V) Propriétés des droites :

1) Droites parallèles :

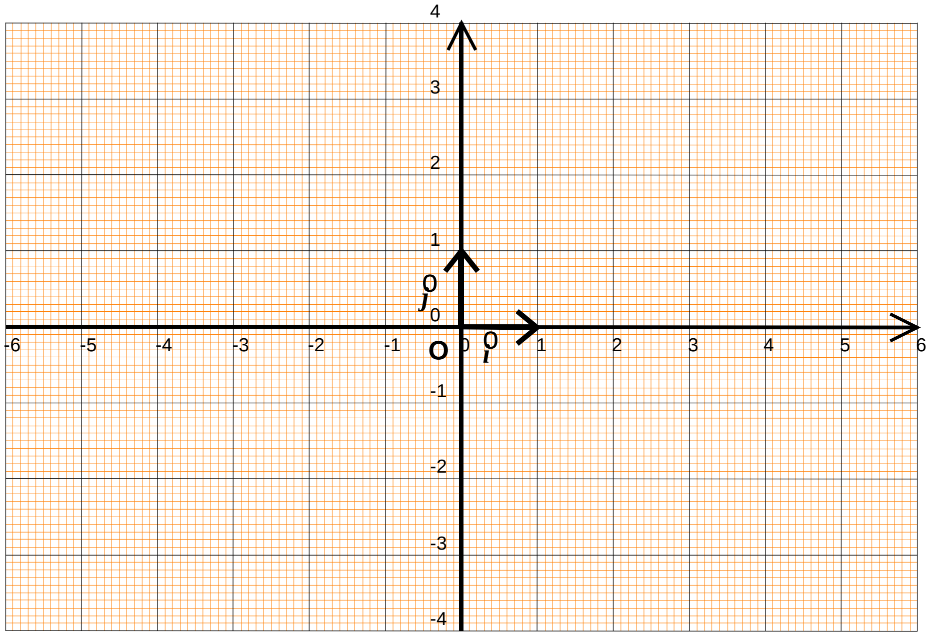
Tracer les droites D1 : y = 2x + 1 et D2 : y = 2x – 1



Deux droites qui ont un même coefficient directeur sont parallèles.

2) Droites perpendiculaires :

Dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, tracer les droites D1 : $y = 4x - 2$ et D2 : $y = - 0,25x$



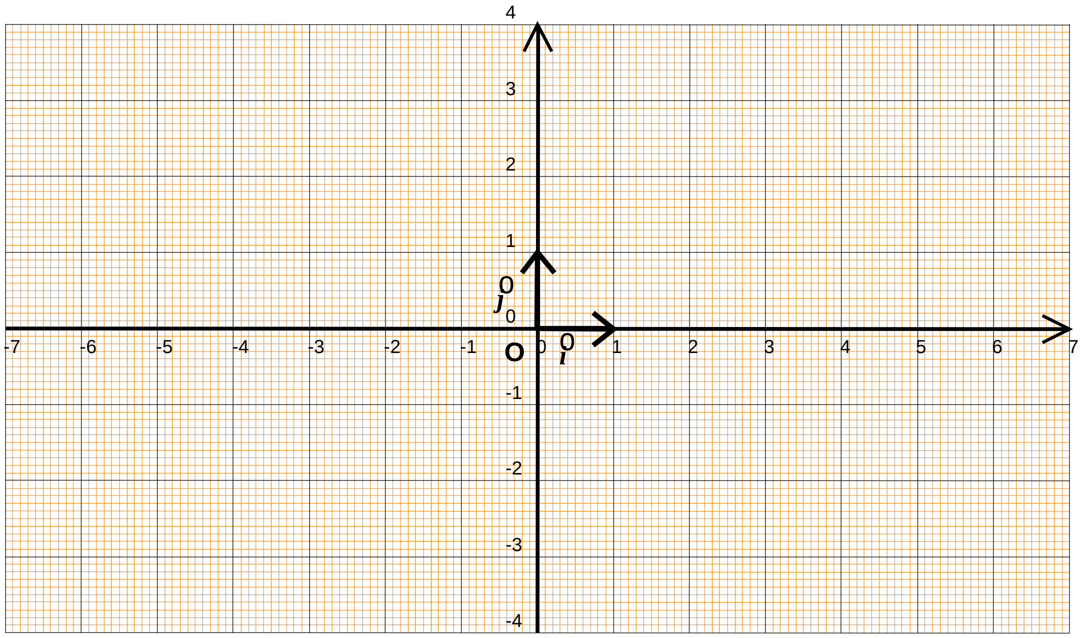
Calculer le produit des coefficients directeurs des droites précédentes.

Dans un repère orthonormal, deux droites dont le produit des coefficients directeurs est égal à –1 sont perpendiculaires.

VI) Exercices :

Exercice N° 1 :

Dans un repère orthonormal, placer les points A(-1 ; 3) et B(1 ; -2).



a) Déterminer une équation de la droite (AB).

b) Tracer la droite D d'équation $y = 0{,}4x + 1$.

c) Ces droites sont-elles perpendiculaires, justifier ?

Exercice N° 2 :

Déterminer une équation de la droite D dans chacun des cas suivants :

1) La droite D a pour coefficient directeur – 1 et pour ordonnée à l'origine 2,5.

2) La droite D a pour coefficient directeur 1 et passe par le point A(0 ; 6).

3) La droite D a pour coefficient directeur – 3 et passe par le point B(-1 ; 4).

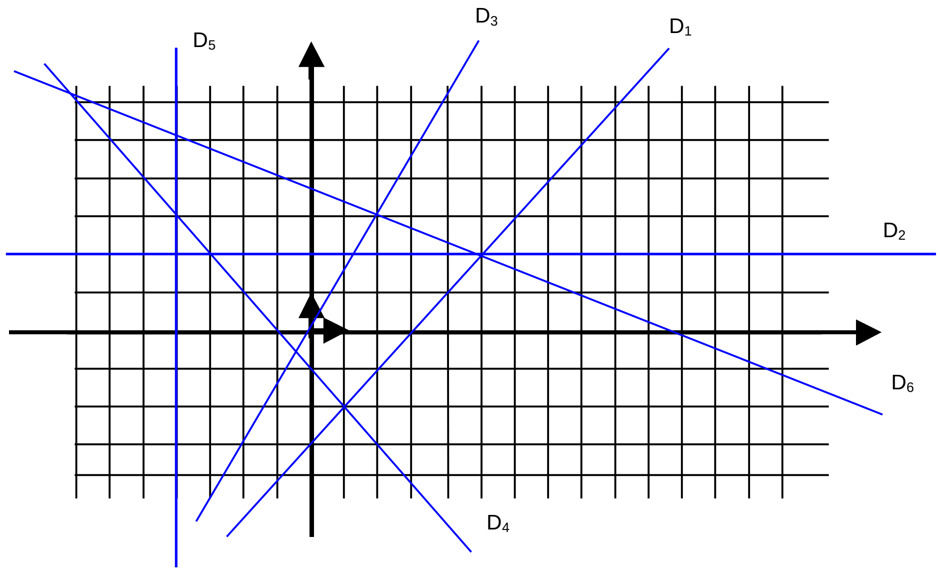
4) La droite D passe par le point M(4 ; -3) et est parallèle à la droite d'équation $y = 2x + 5$.

5) La droite D passe par le point N(6 ; 3) et est perpendiculaire dans un repère orthonormal, à la droite d'équation $y = 3x – 8$.

Exercice N° 3 :

Les droites $3y – 9x + 12 = 0$ et $2y – 6x – 14 = 0$ sont-elles parallèles ?

Exercice N° 4 : Donner les équations des droites D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 et D_6.



Exercice N° 5 :

Sans faire de tracé de droites, indiquer parmi les droites suivantes, celles qui sont parallèles.

D_1 : $y = 2x + 1$ D_2 : $y = - x + 1$ D_3 : $y = 2x$ D_4 : $y = 5x – 1$ D_5 : $y = 2x – 3$
D_6 : $y = - x + 5$

Exercice N° 6 :

Dans un repère orthonormal, sans faire de tracé de droites, indiquer parmi les droites suivantes celles qui sont perpendiculaires.

D1 : $y = 2x – 1$ D2 : $y = 0,5x + 1$ D3 : $y = - 0,5x + 2$

N.B. : Si vous avez internet chez vous. Vous pouver vous connecter sur le site http://jc.meier.free.fr et télécharger dans logiciels gratuits : repérage. Vous aurez la possibilité de faire de nombreux exercices à la maison.