

## CH II Système de deux équations à deux inconnues.

Activité : Lors d'un rallye, deux pilotes décident de se partager les 40 derniers litres de carburant de sorte que leur réservoir contienne la même quantité d'essence. Il reste 9 L dans celui du premier et 17 L dans celui du second.

Soient  $x$  la quantité d'essence donnée au premier et  $y$  celle donnée au second. La première affirmation nous permet de dire :

$$x + y = 40$$

La deuxième affirmation nous permet de dire que :

$$x + 9 = y + 17$$

$$x - y = 17 - 9$$

$$x - y = 8$$

On dispose donc d'un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} x + y = 40 & (1) \\ x - y = 8 & (2) \end{cases}$$

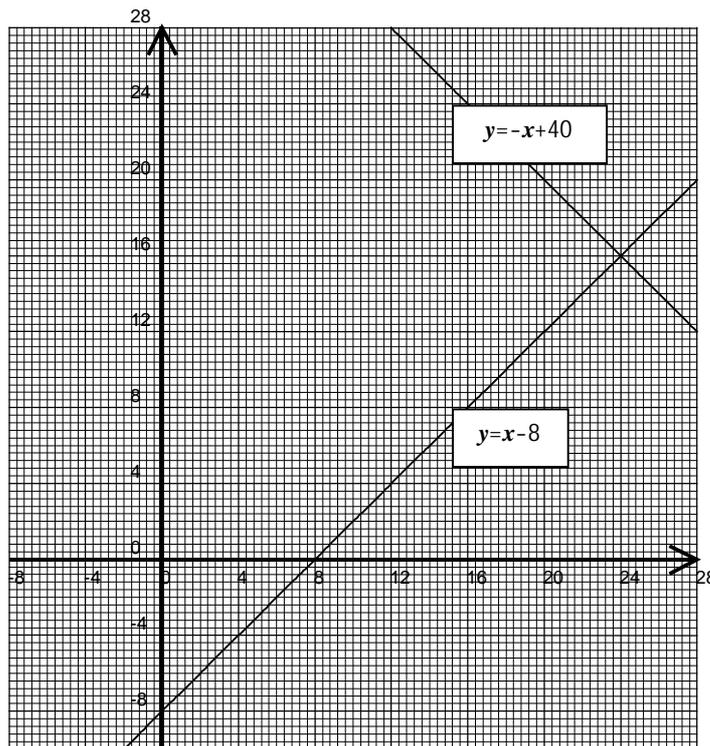
Résoudre ce système nous permettra de connaître la quantité d'essence donnée à chacun des concurrents.

### 1) Résolution graphique :

Dans un repère orthonormal d'unité 1 cm pour 4 L, représentons les deux droites (1) et (2).

De (1) on tire  $y = -x + 40$

De (2) on tire  $y = x - 8$



Le point d'intersection entre les deux courbes est  $(24 ; 16)$ , il représente la solution du système. 24 L seront données au premier et 16 L au second.

## II) Résolution algébrique :

### 1) Résolution par substitution :

Reprenons le système précédent :

$$\begin{cases} x + y = 40 & (1) \\ x - y = 8 & (2) \end{cases}$$

La méthode par substitution consiste à partir d'une des deux équations à exprimer une des deux inconnues en fonction de l'autre, puis à remplacer cette inconnue dans l'autre équation.

A partir de (1), on écrit  $x = 40 - y$ . On remplace  $x$  de la deuxième équation par  $40 - y$  et on détermine la valeur de  $y$ .

$$\begin{aligned} \text{Dans (2)} \quad & 40 - y - y = 8 \\ & 40 - 2y = 8 \\ & -2y = 8 - 40 \\ & -2y = -32 \\ & y = \frac{-32}{-2} \\ & y = 16 \end{aligned}$$

Connaissant  $y$ , on détermine  $x$  en prenant l'une ou l'autre équation.

A partir de (1)

$$\begin{aligned} x + 16 &= 40 \\ x &= 40 - 16 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

La solution est bien la même que graphiquement.

Exercice : Résoudre

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = -6 \end{cases}$$

### 2) Par combinaison linéaire :

Reprenons le système précédent :

$$\begin{cases} x + y = 40 & (1) \\ x - y = 8 & (2) \end{cases}$$

On remarque qu'en ajoutant membre à membre les deux équations, on élimine les termes en  $y$ .

$$\begin{array}{r} (1) \quad x + y = 40 \\ (2) \quad x - y = 8 \\ \hline (1) + (2) \quad 2x = 48 \\ \text{et donc } x = \frac{48}{2} = 24 \end{array}$$

On remplace  $x$  par 24 dans l'une ou l'autre des deux équations et on obtient  $y$ .

A partir de (1)

$$\begin{aligned} 24 + y &= 40 \\ y &= 40 - 24 \\ y &= 16 \end{aligned}$$

La solution est une fois de plus la même.

Cette méthode consiste donc à ajouter membre à membre les deux équations après les avoir multipliées par des facteurs adaptés. Les coefficients d'une même inconnue doivent être opposés pour que les termes s'annulent après addition membre à membre. Si les coefficients sont les mêmes, il suffira de réaliser une soustraction membre à membre.

Exemple 2 : Résoudre 
$$\begin{cases} (1) & 4x + 3y = 4 \\ (2) & 2x + 5y = 3 \end{cases}$$

On reprend la première équation telle qu'elle et on multiplie la deuxième par 2.

$$\begin{array}{r} (1) \qquad \qquad \qquad 4x + 3y = 4 \\ (3) \quad 2 \text{ fois } (2) \quad 4x + 10y = 6 \\ \hline (1) - (3) \qquad \qquad 4x - 4x + 3y - 10y = 4 - 6 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad - 7y = - 2 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad y = 2/7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (4) \quad 5 \text{ fois } (1) \quad 20x + 15y = 20 \\ (5) \quad 3 \text{ fois } (2) \quad 6x + 15y = 9 \\ \hline (4) - (5) \qquad \qquad 20x - 6x + 15y - 15y = 20 - 9 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad 14x = 11 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad x = 11/14 \end{array}$$

La solution est  $\left\{ \frac{11}{14} ; \frac{2}{7} \right\}$

### III) Application à la détermination d'une équation de droite :

Cherchons l'équation d'une droite connaissant les coordonnées de deux de ses points A (- 1 ; - 2) et B ( 3 ; 3).

L'équation recherchée est du type  $y = ax + b$

Les coordonnées de A vérifient :  $-2 = a(-1) + b$

Les coordonnées de B vérifient :  $3 = a(3) + b$

On obtient le système : 
$$\begin{cases} - a + b = - 2 & (1) \\ 3a + b = 3 & (2) \end{cases}$$

Résolvons algébriquement le système en utilisant les deux méthodes :

#### a) Par substitution :

De (1) on tire  $b = a - 2$

De (2) on obtient alors  $3a + a - 2 = 3$

$$4a = 3 + 2$$

$$4a = 5$$

$$a = 5/4$$

A partir de (1)

$$-\frac{5}{4} + b = -\frac{8}{4}$$

$$b = -\frac{8}{4} + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$$

### b) Par combinaison :

$$(3) \quad 3 \text{ fois (1)} \quad -3a + 3b = -6$$

$$(2) \quad 3a + b = 3$$

$$(3) + (2) \quad -3a + 3a + 3b + b = -6 + 3$$

$$4b = -3$$

$$b = -3/4$$

$$(2) - (1) \quad 3a + a + b - b = 3 - -2$$

$$4a = 5$$

$$a = 5/4$$

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$$

### IV) Résolution d'un problème du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues :

1) Exemple : Lors d'un stage en entreprise, il est confié à Léo de vider un fût de 100 L d'huile dans 35 récipients. Certains récipients ont une contenance de 2 L et d'autres de 5 L. Combien de récipients de chaque sorte doit-il utiliser de sorte qu'ils soient tous entièrement remplis ?

La résolution de ce problème se fait en 4 étapes tout comme la résolution d'une équation à 1 inconnue.

a) Étape N°1 : Il faut faire le choix des inconnues.

Soit x le nombre de récipients de 2 L.

Soit y le nombre de récipients de 5 L.

b) Étape N° 2 : Il faut effectuer la mise en équation.

Il existe 35 récipients au total donc  $x + y = 35$

Le nombre  $x$  de récipient contenant 2 L plus le nombre  $y$  de récipient contenant 5 L correspond à 100 L donc  $2x + 5y = 100$

Le système est donc :

$$\begin{cases} x + y = 35 & (1) \\ 2x + 5y = 100 & (2) \end{cases}$$

c) Étape N° 3 : Résolution du système .

$$\begin{aligned} 2(1) - (2) & \quad 2x - 2x + 2y - 5y = 70 - 100 \\ & \quad - 3y = - 30 \\ & \quad y = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5(1) - (2) & \quad 5x - 2x + 5y - 5y = 175 - 100 \\ & \quad 3x = 75 \\ & \quad x = 25 \end{aligned}$$

d) Étape N° 4 : Il faut conclure.

Léo pourra remplir 25 récipients de 2 L et 10 récipients de 5 L.

## 2) Exercices :

### Exercice N° 1 :

Sur une ancienne facture encore en francs, on relève les consommations suivantes :

980 kWh en « heures creuses »

710 kWh en « heures pleines » pour un montant de 845,40 F

Sur une deuxième facture de la même époque, on relève les consommations suivantes :

490 kWh en « heures creuses »

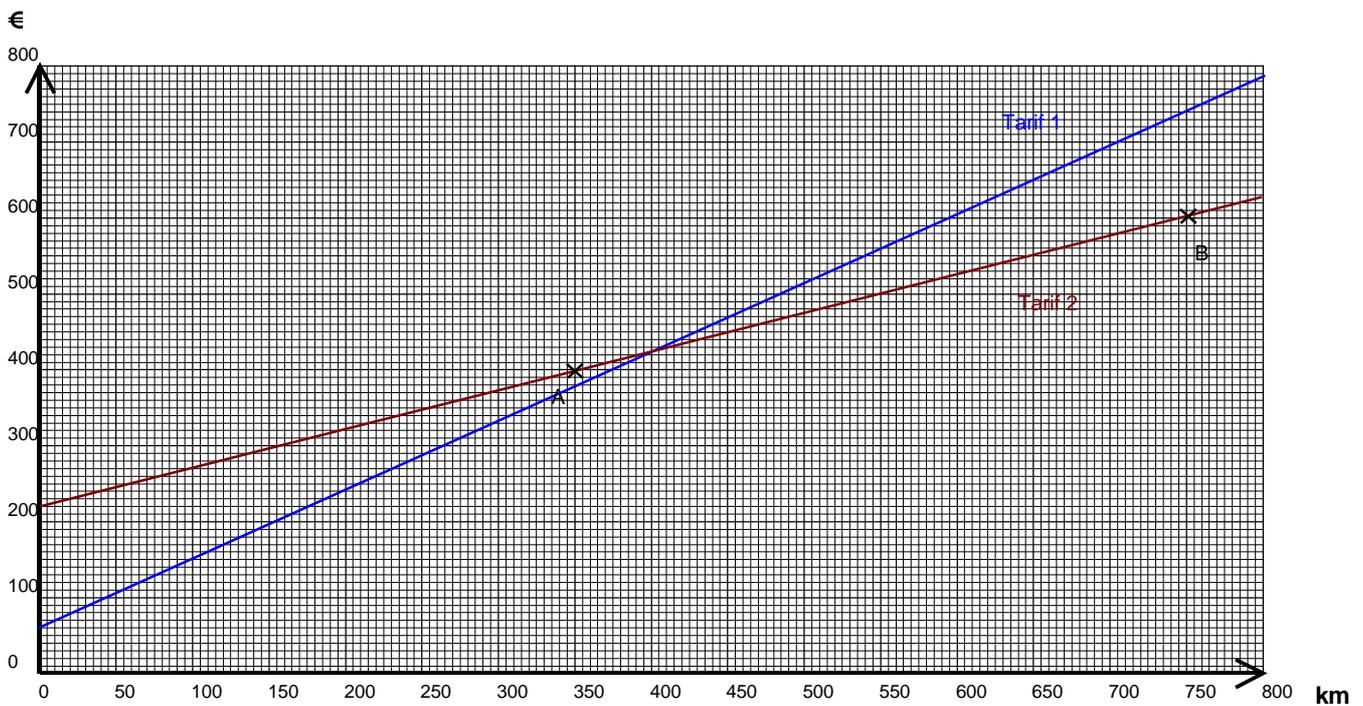
550 kWh en « heures pleines » pour un montant de 555,30 F

Déterminer le prix du kWh en « heures creuses » et celui en « heures pleines ».

Exercice N° 2 : Résoudre le système 
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Exercice N° 3 : Résoudre le système 
$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$$

**Exercice N° 4 :** Une entreprise veut expédier des marchandises à un client distant de 400 km. Un transporteur lui propose deux tarifs sous forme graphique.



- Estimer graphiquement le prix à payer pour ce trajet, pour chaque trajet (Les pointillés de construction devront être apparents). Quel est le tarif le plus avantageux ?
- Estimer et noter les coordonnées du point d'intersection des deux droites. Que représente l'abscisse de ce point ?
- Déterminer une équation de la droite représentative du tarif 2 en utilisant les coordonnées des points A et B. ( On choisit : x le nombre de km parcourus et y le prix payé). L'équation de la droite sera du type  $y = ax + b$ .
- Déterminer une équation de la droite représentative du tarif 1.
- Résoudre algébriquement le système formé par les deux équations de droite précédentes et vérifier que la solution obtenue correspond au point de la question b).