CH VI Approcher une courbe par une droite.

I) Droite et équation de droite :

1) Définition :

☺ Une droite caractérise une fonction affine dont l'équation est y = ...
a et b sont deux nombres réels. a est appelé le .... de la droite et b ....

2) Déterminer l'équation d'une droite :

a) On connaît le coefficient directeur et les coordonnées d'un point de la droite :

Exemple : Recherchons l'équation de la droite passant par A(5 ; 2) et de coefficient directeur a = - 0,25.

→ L'équation générale de la droite est y = ...

→ Puisque que l'on connaît le coefficient directeur, on peut donc écrire y = ...

→ Puisque la droite passe par le point A, remplaçons x par 5 et y par 2

....

....

....

→La droite a pour équation y = ...

b) On connaît deux points de la droite :

Une droite passe par les points A(-2 ; -1) et B(2 ; 5). Quelle est cette droite ?

① Détermination par le calcul :

L'équation de la droite est $y = ax + b$.

On obtient le coefficient directeur a en calculant $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = L'équation de la droite devient y = ... Il nous reste à trouver la valeur de b. Cette droite passe par le point A, on peut donc remplacer x et y par les coordonnées de A.

....

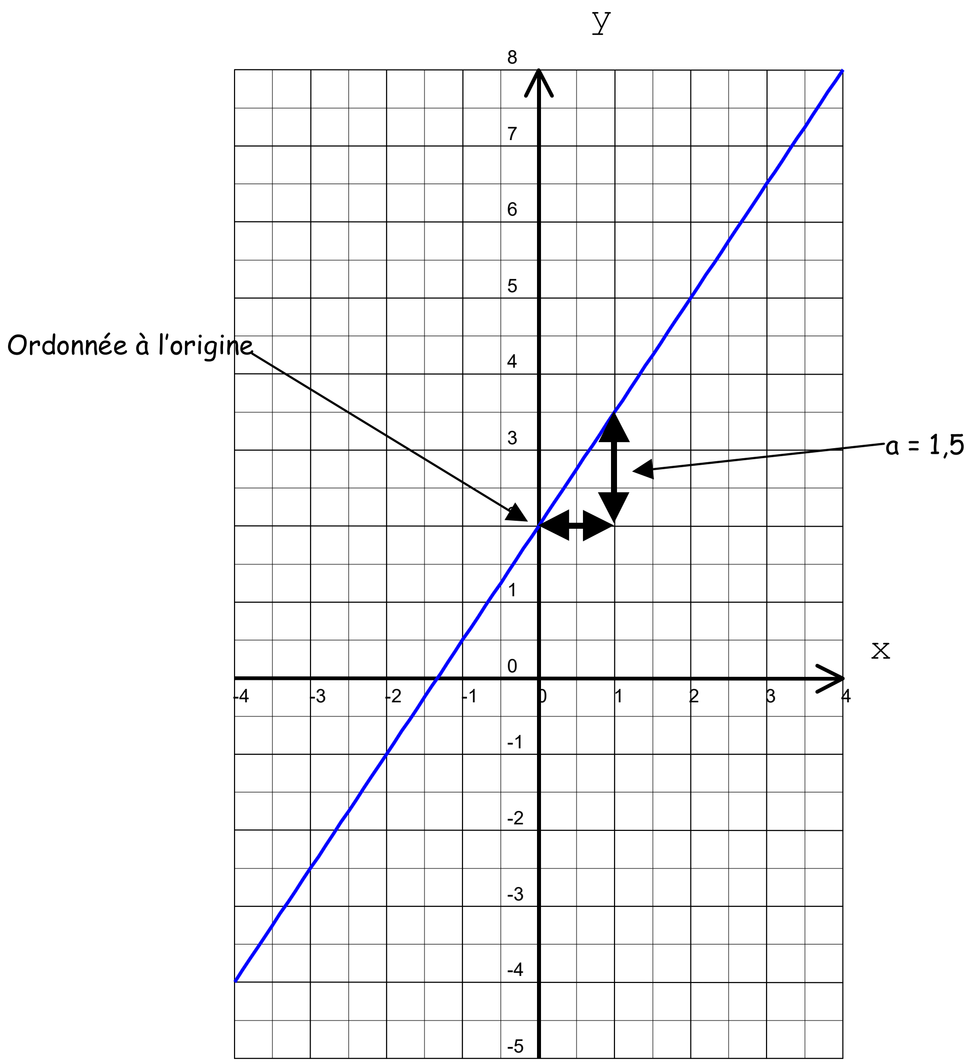
....

.... L'équation est donc y = ...

Exercice : Donner l'équation de la droite passant les points A(2 ; 4) et B(4 ; 1).

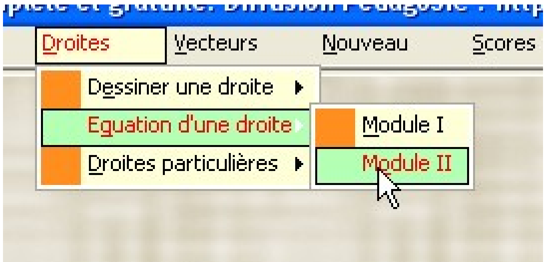
② Détermination graphique :

On trace la droite passant par les deux points. L'équation de la droite est $y = ax + b$. On mesure sur le graphique l'évolution de y lorsque x augmente de 1. Cette évolution correspond au coefficient directeur a.

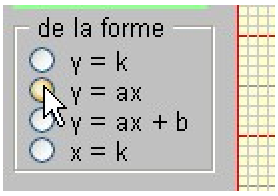


Lorsque x augmente de 1, y augmente de .... a = ...
b se lit en prenant l'ordonnée à l'origine. L'ordonnée à l'origine est .... b = ...
La droite a pour équation y = ...

Exercice : Télécharger et installer le logiciel de JC Meier « Reperage » à l'adresse : http://jc.meier.free.fr/log_shar.php.



Sélectionner l'onglet « Droites », puis « Équation d'une droite » et enfin « Module I » pour les fonctions linéaires et « Module II » pour les fonctions affines.
L'exercice consiste à déterminer l'équation de la droite demandée. Pour le « Module II », il vous faudra au préalable choisir le type de droite à déterminer.

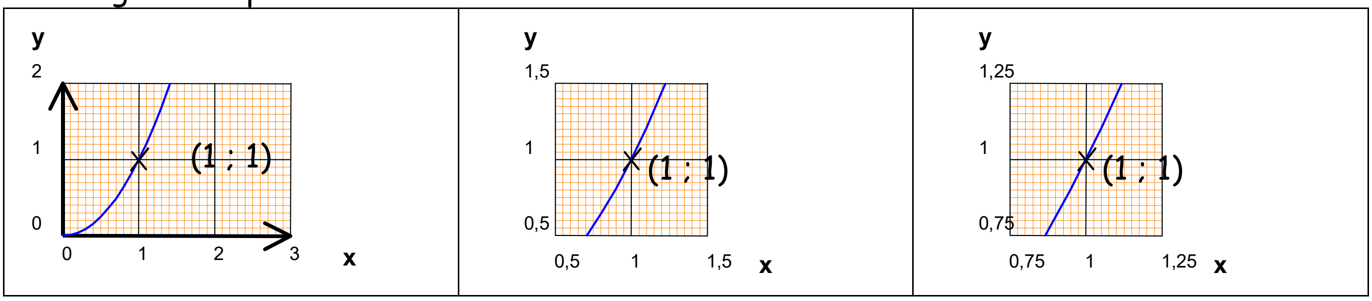


S'il s'agit d'une fonction linéaire, on coche y = ax, s'il s'agit d'une fonction affine, on coche y = ax + b. Il nous reste à donner la valeur du coefficient a et du coefficien b. Les droites y = k et x = k sont deux types de droites particulières. La première y = k est une droite horizontale, par exemple y = -3, c'est la droite horizontale qui coupe l'axe des y en -3. Le deuxième x = k est une droite verticale, par exemple x = 5 est la droite verticale qui coupe l'axes des x en 5. Dans ces deux cas, il faut donner la valeur du coefficient k.

II) Comment approcher une courbe par une droite ?

1) Activité N°1 :

A l'aide d'un grapheur on trace la courbe représentative de la fonction f : x → x^2.
On a placé le point de coordonnées (1 ; 1), puis on a réalisé plusieurs zooms successifs au voisinage de ce point.

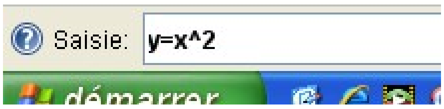


Que semble devenir, dans ces zooms successifs, l'allure de la courbe au voisinage du point de coordonnées (1 ; 1) ?

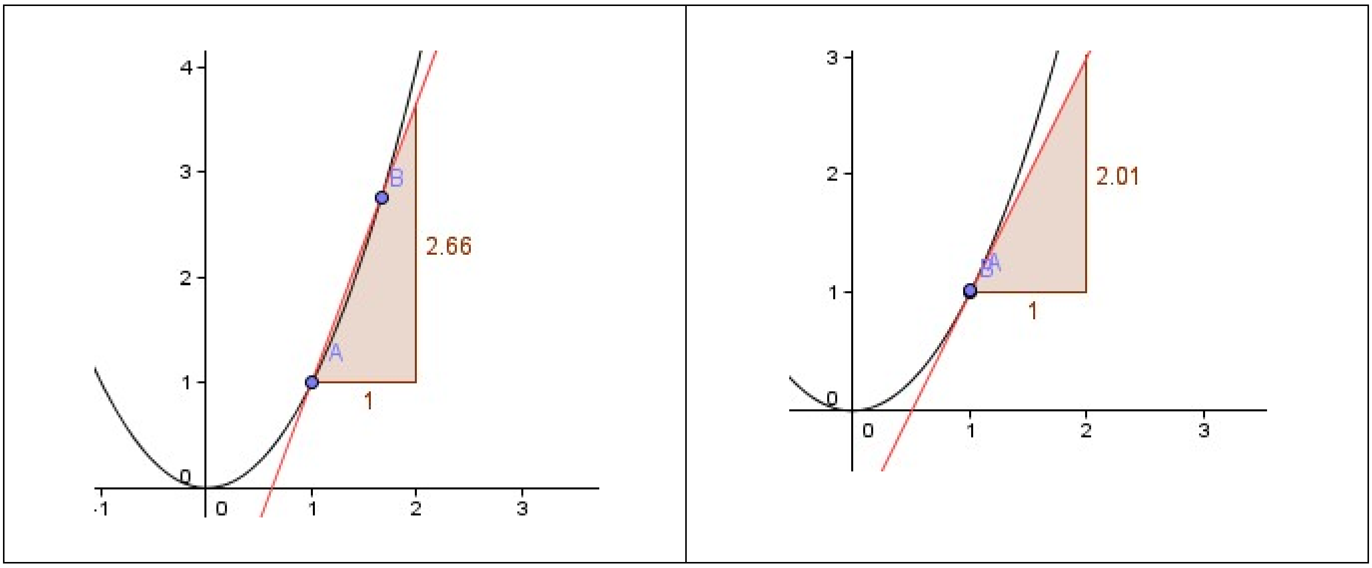
....

2) <u>Activité N°2</u> :

Lancer l'application informatique Geogebra.
Ouvrir le fichier Approcher_une_courbe_avec_une_droite.ggb
Dans la fenêtre « saisie », on a tapé l'instruction y=x^2 qui permet de tracer la courbe de la fonction $x \to x^2$.



On place un point A sur cette courbe, puis un point B, ces deux points sont mobiles sur la courbe. On trace la droite (AB) en rouge, on met en évidence la pente de la droite qui correspond au coefficient directeur de celle-ci.
On positionne le point A sur la courbe de sorte que ses coordonnées deviennent (1 ; 1). On se propose ensuite de faire glisser le plus prés possible de A le point B afin de pouvoir lire la valeur de la pente. Afin d'obtenir une plus grande précision, il est possible de zoomer sur cette courbe.



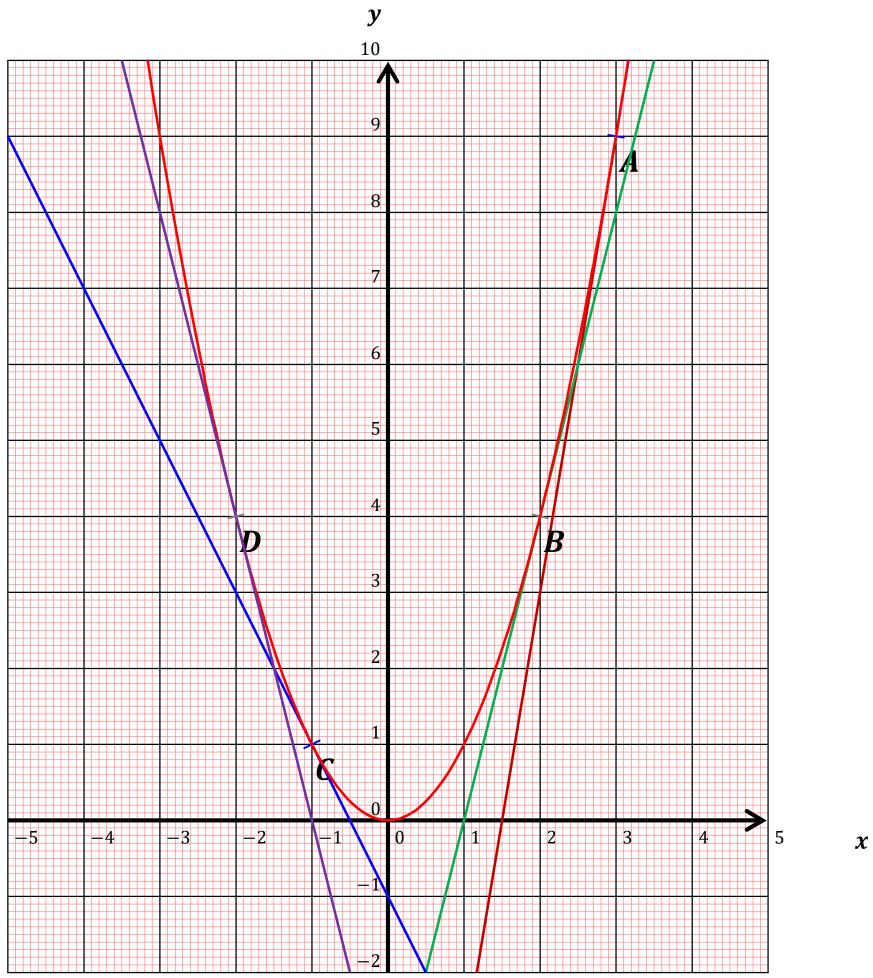
En zoomant de plus en plus sur le point A et en approchant le plus possible le point B du point A, vers quelle valeur tend le coefficient de la pente ? Il tend vers .

☺ La droite obtenue lorsque B se situe le plus prés possible de A s'appelle la …………………… à la courbe au point A(1 ; 1). Son coefficient directeur s'appelle ………………………………………… de la fonction f au point d'abscisse 1. On le note …………
On approche une courbe en un point $A(x_A ; y_A)$ par une fonction affine. Le coefficient directeur de la droite est le nombre dérivé au point d'abscisse x_A. On le note $f'(x_A)$.

Exercice : Dans le cas précédent, on écrit f'(1) = 2. De la même manière, pour la fonction $f(x) = x^2$, chercher :

f'(3) =............ f'(4) =............ f'(-1) =............ f'(-2) =.......... f'(0) = ...

(Sans GeoGebra, le tracé de la courbe et des tangentes apparaissent ci-dessous.)

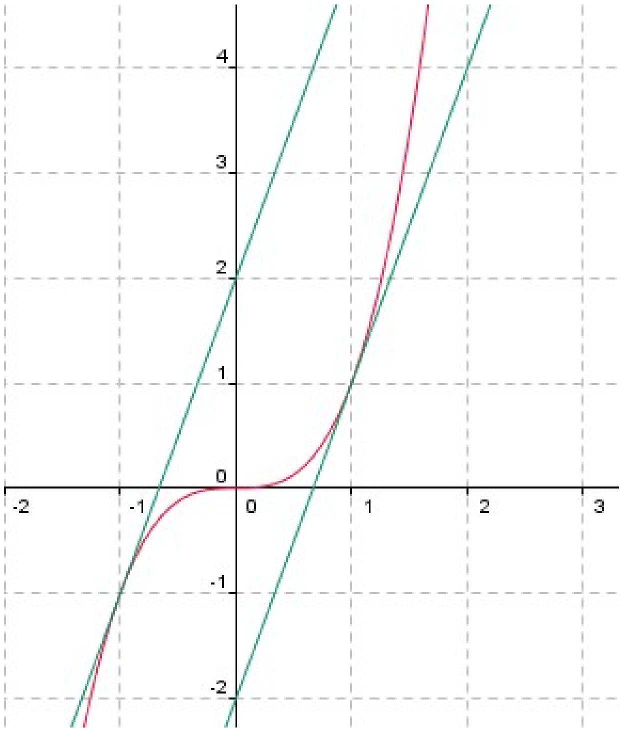


Exercice :

La courbe est celle de la fonction $f(x) = x^3$ sur [-2 ; 2].
On a tracé deux tangentes à cette courbe, une au point d'abscisse –1 et l'autre au point d'abscisse 1.
Déterminer les équations de ces deux tangentes.

Tangente en -1 :

Tangente en 1 :



Exercice :

Soit f une fonction définie sur [-1 ; 4] et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-1	0	1	2	3	4
f(x)	0	-4	-6	-6	-4	0
f'(x)	-5	-3	-1	1	3	5

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est exacte ; la corriger si elle ne l'est pas.

a) $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées (0 ; -3).

b) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3 est 3.

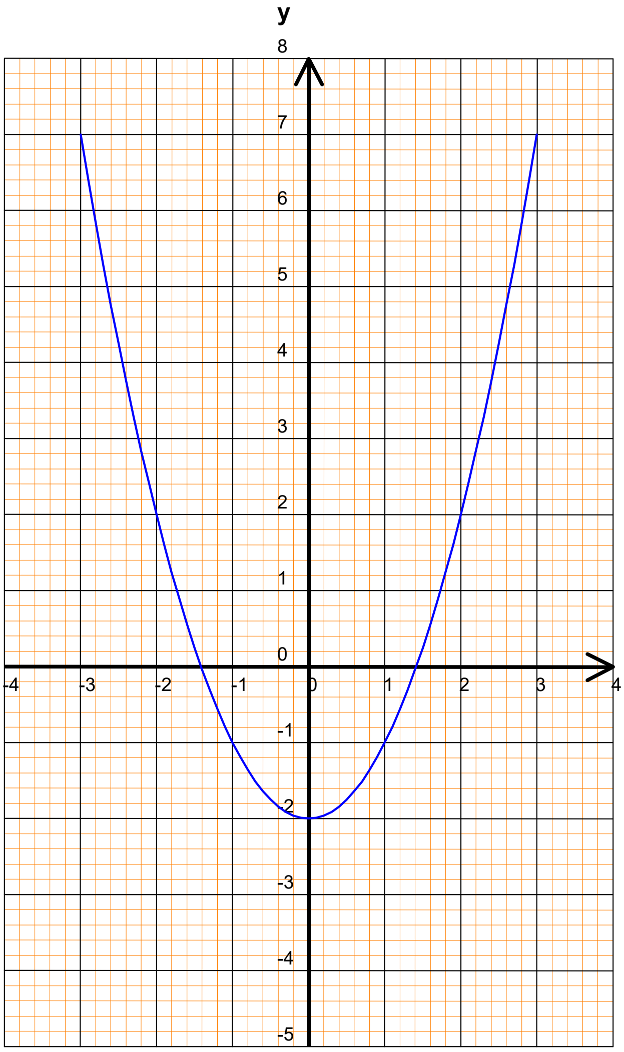
c) Le nombre dérivé de f en 4 est 5.

d) La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a son coefficient directeur égal à –6.

e) L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est y = -3x – 4.

f) L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est y = x – 5.

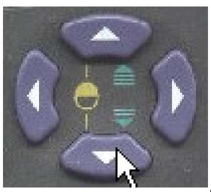
Exercice :



Soit f la fonction définie sur [-3 ; 3] par $f(x) = x^2 - 2$.
Tracer les tangentes à la courbe aux points de coordonnées –2 ; -1 ; 0 ; 1 et 2 connaissant leurs nombres dérivés :
$f'(-2) = -4$
$f'(-1) = -1$
$f'(0) = 0$
$f'(1) = 1$
$f'(2) = 4$

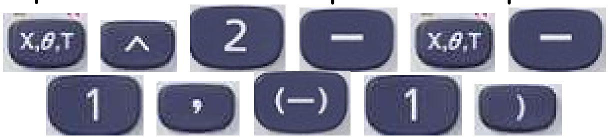
III) <u>Comment obtenir le nombre dérivé à l'aide d'une calculatrice ?</u>

<u>Exemple :</u> avec la calculatrice, calculer le nombre dérivé de la fonction f définie pour tout x par $f(x) = x^2 - x - 1$ en $x = -1$.

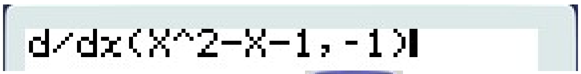
Avec la Casio graph 25+ ou graph 25+ pro	Avec la Texas Instrument
	
On sélectionne le menu  puis  . On appuie sur la touche  puis sur la touche F correspondante à  et enfin sur la touche F correspondante à .	On appuie sur la touche  . A l'aide des flèches , on recherche

La calculatrice affiche

qu'il convient de compléter en tapant:

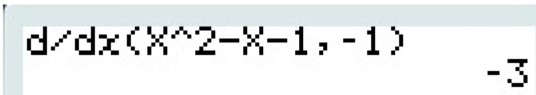


On obtient



On appuie ensuite sur 

et on obtient le nombre dérivé en –1.

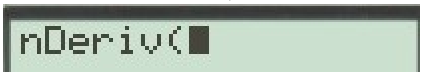


Ce nombre vaut –3.

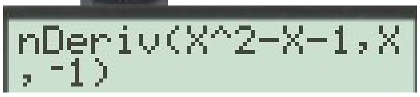
l'expression 

que l'on sélectionne en appuyant sur 

ou sur le chiffre associé, ici 8.

On obtient 

qu'il convient de compléter en tapant:

On obtient 

On appuie sur 

et on obtient le nombre dérivé en –1.

Ce nombre vaut –3.

<u>Problème 1 :</u> Coût de fabrication.

Une entreprise fabrique du matériel informatique. Si x désigne le nombre d'objets d'un certain type fabriqués, le coût de fabrication, en euros, de ces x objets est

$$C(x) = -0{,}01x^2 + 100x + 3\,000.$$

1) a) Quel est, en euros, le coût de fabrication de 1 000 objets, puis de 1 001 objets ?

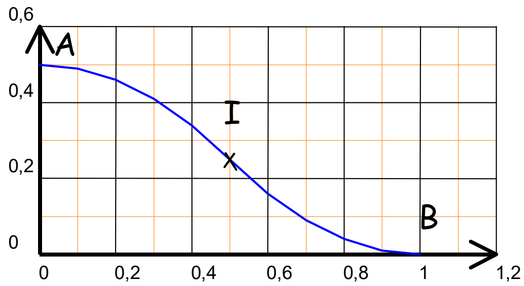
b) En déduire l'augmentation du coût entraîné par la fabrication de cet objet supplémentaire.

2) a) A l'aide de la fonction « nombre dérivé » de la calculatrice, calculer $C'(1\,000)$.

b) Comparer $C'(1\,000)$ avec la valeur trouvée en 1) b). Quelle est l'erreur commise ?

Coût marginal d'un produit :
Le coût marginal correspond au coût de production d'une unité supplémentaire. En pratique, on s'intéresse généralement au coût d'une série supplémentaire. Le coût marginal aide à la recherche d'un optimum technique de l'entreprise lorsqu'elle est dans une zone de bénéfice. En économie, on prend souvent $C(x+1) - C(x) = C'(x)$

Problème 2 : Rampe de franchissement.
Pour faire franchir une marche de 0,5 mètre à des chariots, on installe une rampe métallique en pente douce. Pour l'installation, l'emprise au sol est 1 mètre et la rampe est tangente au sol et au dessus de la marche. Un technicien propose la représentation ci-dessous :



L'arc $\widehat{AI}$ est un arc de la courbe représentative de la fonction f définie [0 ; 0,5] par $f(x) = -x^2 + 0,5$.
L'arc $\widehat{IB}$ est un arc de la courbe représentative de la fonction g définie [0,5 ; 1] par $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

1) a) Lire les coordonnées de I.

b) Vérifier que $f(x_I) = g(x_I)$.

2) a) A l'aide de la fonction « nombre dérivé » de la calculatrice, déterminer le nombre dérivé de f en x_I.

b) A l'aide de la fonction « nombre dérivé » de la calculatrice, déterminer le nombre dérivé de g en x_I.

c) Comparer $f'(x_I)$ et $g'(x_I)$.

d) Conclure sur la qualité du raccordement.

3) a) Déterminer le nombre dérivé de f en x_A.

b) Déterminer le nombre dérivé de g en x_B.

c) La rampe est-elle bien tangente au sol et au-dessus de la marche comme prévu ?