Utilisation de Geogebra pour résoudre un problème utilisant la fonction dérivée.

Conseil : Lancer Geogebra et faire la démarche en parallèle.

Le problème est le suivant : On étudie la glycémie (taux de sucre dans le sang) d'une personne après absorption de glucose. La glycémie peut s'exprimer en grammes par litre (g/L). Elle est fonction du temps t (en heures).
Cette glycémie est modélisée par la fonction g telle que :

$$g(t) = -0{,}5t^3 + 1{,}5t + 1 \text{ pour } t \text{ variant de } 0 \text{ à } 1{,}75.$$

On prend t = 0 au moment de l'ingestion du glucose.
Une glycémie supérieure à 1,25 g/L est appelée hyperglycémie.
Une glycémie inférieure à 0,75 g/L est appelée hypoglycémie.

Problématique : Quels sont les intervalles de temps où la personne observée est soit en hyperglycémie soit en hypoglycémie.

Souvent l'étude consiste, après avoir calculé la dérivée g' de la fonction précédente, à compléter un tableau de variation. En effet l'étude du signe de la dérivée nous indique si la fonction étudiée est croissante ou décroissante.

L'énoncé nous indique que le temps varie de 0 à 1,75 h. Ce sera le domaine d'étude de notre fonction que l'on appelle en mathématique le domaine de définition.

$$D_g = [0 ; 1{,}75]$$

Calcul de la dérivée de la fonction g(t). Pour se faire on utilise le tableau des dérivées.

Si f(x) =	alors f'(x) =
ax + b	a
x^2	2x
x^3	$3x^2$
x^n	$n.x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
U(x) + V(x)	U'(x) + V'(x)
k.U(x) $(k \in \mathbb{R})$	k.U'(x)

L'idée est de découper la fonction à dériver en autant de dérivées à calculer que l'on peut identifier dans le tableau précédent. Afin de ne pas se perdre entre les variables, on remplacera t par x ce qui nous aidera plus dans la suite de l'étude : $g(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x + 1$.
On peut donc découper la fonction en deux fonctions l'une basée sur x^3 et l'autre sur

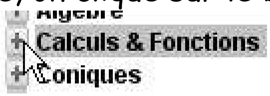
ax + b. Dans la première partie x^3 est multiplié par –0,5. (Rappel : pour dériver une fonction multipliée par une constante, on multiplie la dérivée par cette constante : k.U(x) → k.U'(x)), la deuxième partie de la fonction correspond à ax + b.

$$g(x) = -0{,}5x^3 \;/\; + 1{,}5x + 1.$$

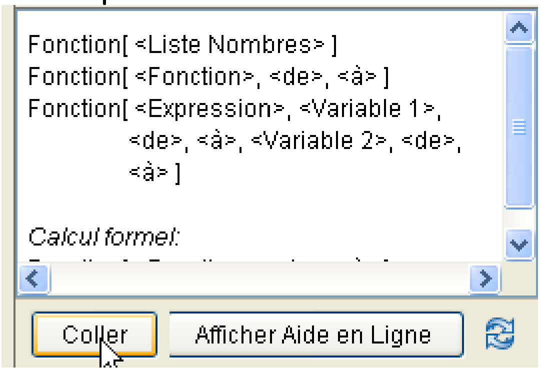
$$g'(x) = -0{,}5(3x^2) + 1{,}5 = -1{,}5x^2 + 1{,}5.$$

<u>Étude du signe de la dérivée.</u> Afin d'éviter des calculs, il suffit de tracer la fonction dérivée et d'observer son signe.

A droite de la barre de saisie, on clique sur le bouton d'aide : 

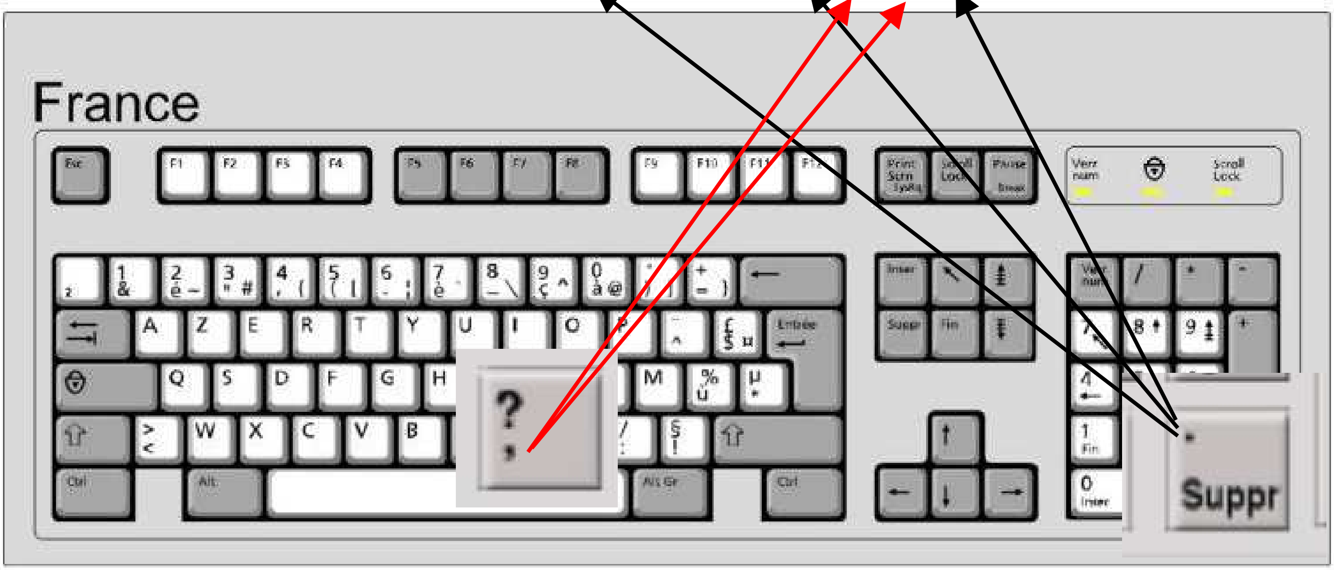
. Il suffit alors de sélectionner 

puis 

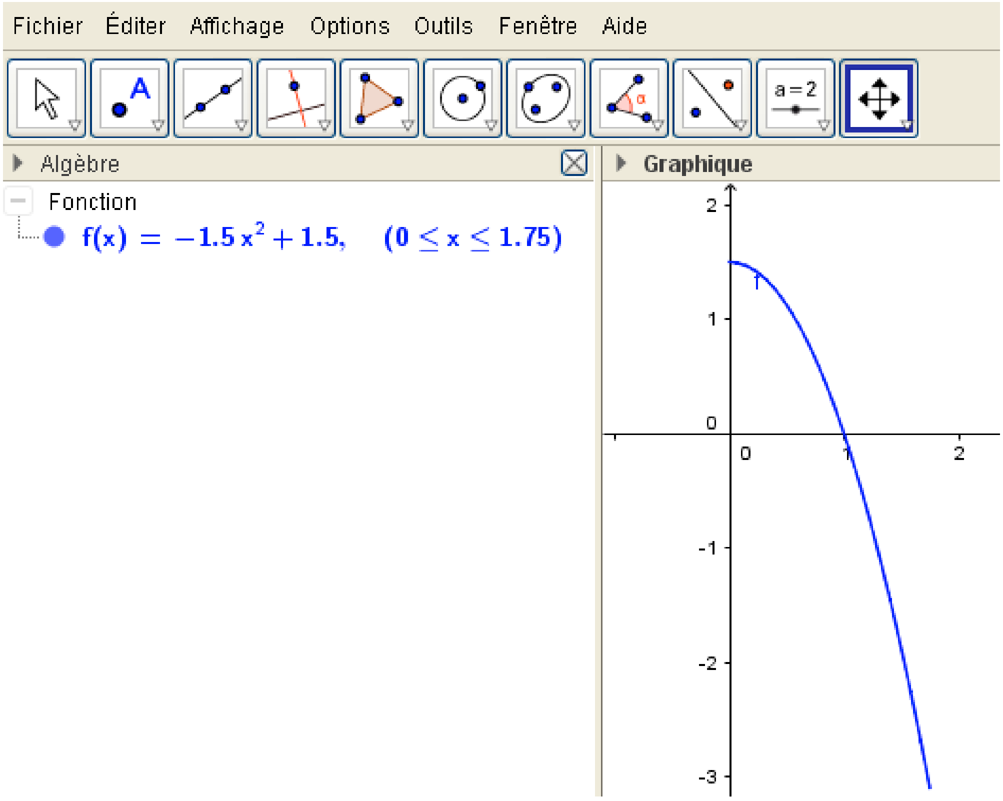
. Il suffit alors de coller l'instruction du tracé de la fonction: 

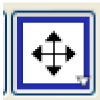
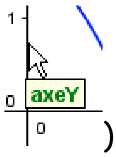
Il faut alors compléter l'expression Fonction[<Fonction>,<de>,<à>]. Le soucis est que Geogebra fait la distinction entre la virgule donnée à un nombre (comme par exemple 3,25) et la virgule utilisée dans le texte. (malade, il se soigne). Il conviendra donc d'utiliser le clavier correctement est donc d'écrire:

Fonction[-1.5x^2+1.5,0,1.75]



Cette instruction commande à Geogebra de tracer la fonction dérivée entre 0 et 1,75.



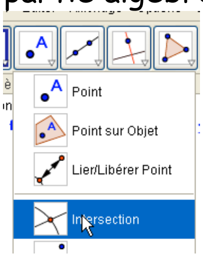
Il est important de vérifier que nous n'avons pas commis d'erreur de saisie dans la partie algèbre de Geogebra. Ensuite à l'aide de la touche , il est possible d'ajuster la taille de la courbe. (On peut zoomer en tournant la molette de la souris, mais on peut également ajuster un axe à la fois en cliquant, après avoir sélectionner la touche précédente, sur l'axe à ajuster. 

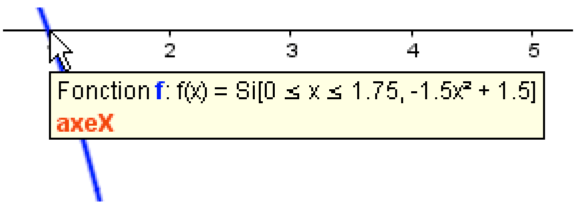
)

A partir de cette courbe, il est facile de compléter le signe de la dérivée.

x	0		1		1,75
Signe de f'(x)		+	0	-	

Il se peut que l'abscisse de la valeur qui annule la dérivée ne soit pas aussi facile à lire. Penser à utiliser dans ce cas toutes les possibilités de Geogebra en mettant pas exemple un point d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses et lire la valeur dans la partie algèbre.

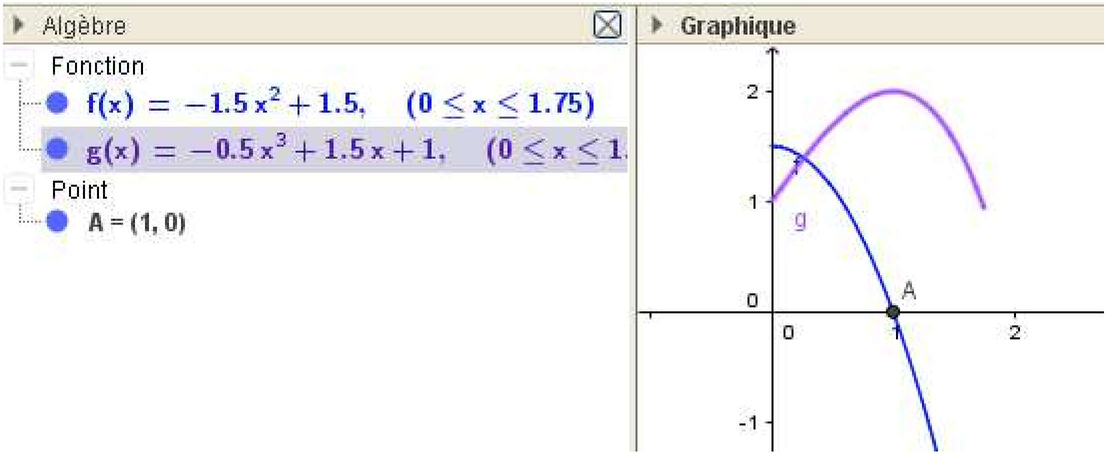


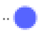


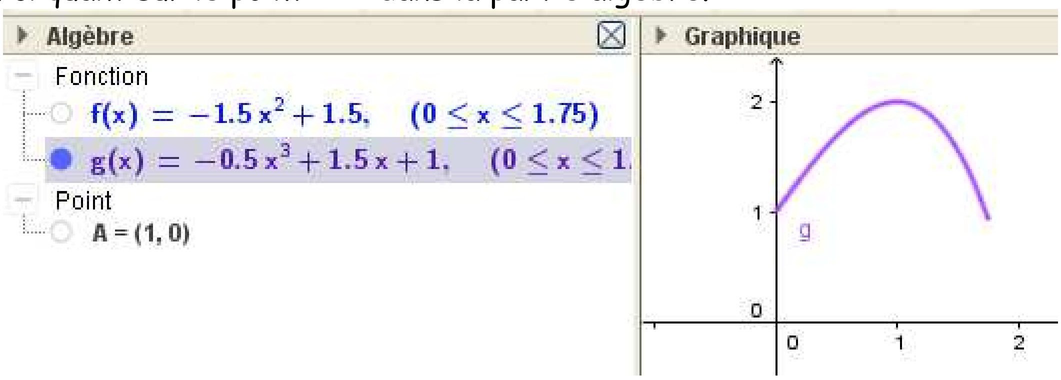
Le signe de la dérivée nous indique que la fonction est croissante si celui-ci est positif et décroissante s'il est négatif.

x	0		1		1,75
Signe de f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗		↘	

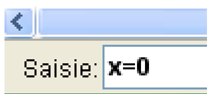
Il nous reste à déterminer les valeurs aux bornes, traçons de la même manière la fonction f(x).

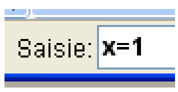


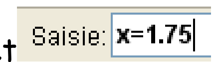
Afin de ne pas se perdre dans les différentes courbes et points, il est possible de les cacher en cliquant sur le point  dans la partie algébre.



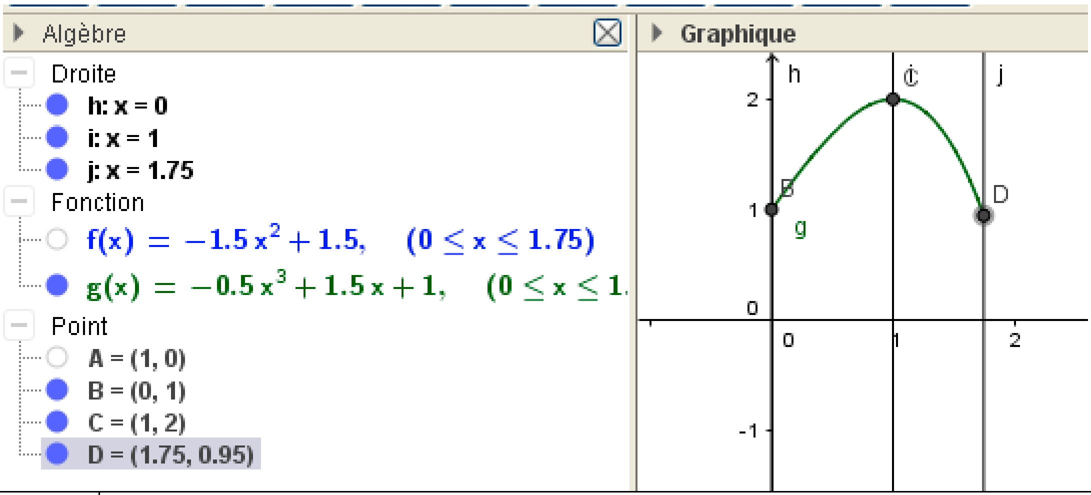
Pour lire exactement les coordonnées des points dont les abscisses sont celles du tableau de variation. Une possibilité est de tracer les trois droites verticales correspondantes aux abscisses du tableau de variation.

Pour cela dans la barre de saisie, il suffit de taper 

, 

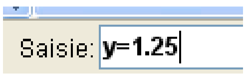
et 

. De mettre trois points d'intersections et de lire les coordonnées pour finaliser le tableau de variation.

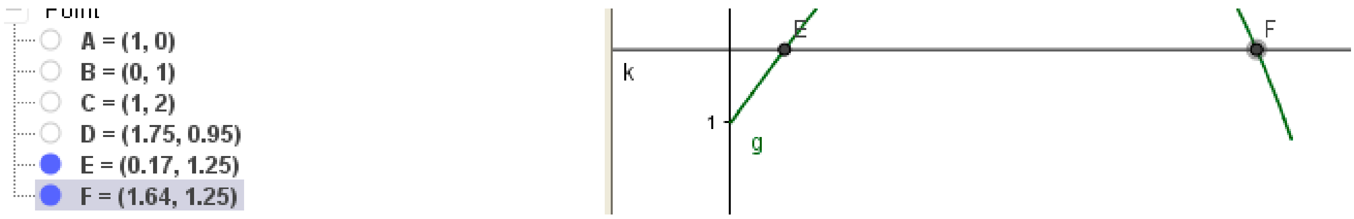


x	0		1		1,75
Signe de f'(x)		+	0	-	
f(x)	1	↗	2	↘	0,95

On peut alors répondre à la question: " A quel moment est-on en hyperglycémie ?"

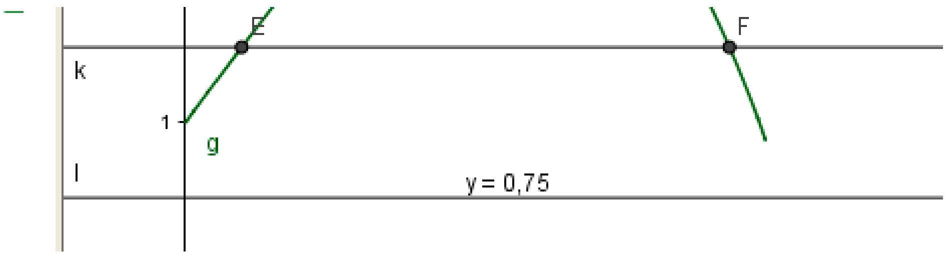
Tracons la droite d'équation 

, dessinons le point d'intersection de la courbe et de cette droite.



On est en hyperglycémie entre 0,17 h et 1,64 h.

"Quand est-on en hypoglycémie ?"



La réponse est jamais entre 0 h et 1,75 h.