Utilisation de la calculatrice T.I. pour résoudre un problème utilisant la fonction dérivée.

Conseil : Prendre la calculatrice et faire la démarche en parallèle.

Le problème est le suivant : On étudie la glycémie (taux de sucre dans le sang) d'une personne après absorption de glucose. La glycémie peut s'exprimer en grammes par litre (g/L). Elle est fonction du temps t (en heures).
Cette glycémie est modélisée par la fonction g telle que :

$$g(t) = -0{,}5t^3 + 1{,}5t + 1 \text{ pour } t \text{ variant de } 0 \text{ à } 1{,}75.$$

On prend t = 0 au moment de l'ingestion du glucose.
Une glycémie supérieure à 1,25 g/L est appelée hyperglycémie.
Une glycémie inférieure à 0,75 g/L est appelée hypoglycémie.

Problématique : Quels sont les intervalles de temps où la personne observée est soit en hyperglycémie soit en hypoglycémie.

Souvent l'étude consiste, après avoir calculé la dérivée g' de la fonction précédente, à compléter un tableau de variation. En effet l'étude du signe de la dérivée nous indique si la fonction étudiée est croissante ou décroissante.

L'énoncé nous indique que le temps varie de 0 à 1,75 h. Ce sera le domaine d'étude de notre fonction que l'on appelle en mathématique le domaine de définition.

$$D_g = [0 \,;\, 1{,}75]$$

Calcul de la dérivée de la fonction g(t). Pour se faire on utilise le tableau des dérivées.

Si f(x) =	alors f'(x) =
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n.x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$U(x) + V(x)$	$U'(x) + V'(x)$
$k.U(x) \quad (k \in \mathbb{R})$	$k.U'(x)$

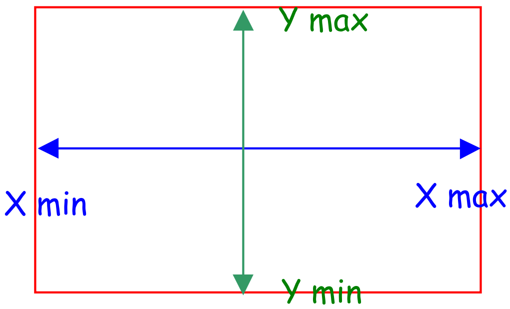
L'idée est de découper la fonction à dériver en autant de dérivées à calculer que l'on peut identifier dans le tableau précédent. Afin de ne pas se perdre entre les variables, on remplacera t par x ce qui nous aidera plus dans la suite de l'étude : $g(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x + 1$.
On peut donc découper la fonction en deux fonctions l'une basée sur x^3 et l'autre sur

ax + b. Dans la première partie x^3 est multiplié par –0,5. (Rappel : pour dériver une fonction multipliée par une constante, on multiplie la dérivée par cette constante : $k.U(x) \rightarrow k.U'(x)$), la deuxième partie de la fonction correspond à ax + b.

$$g(x) = -0{,}5x^3 \; / \; + 1{,}5x + 1.$$

$$g'(x) = -0{,}5(3x^2) + 1{,}5 = -1{,}5x^2 + 1{,}5.$$

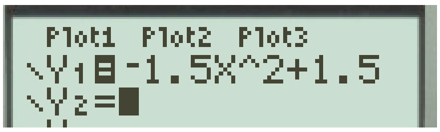
<u>Étude du signe de la dérivée.</u> Afin d'éviter des calculs, il suffit de tracer la fonction dérivée et d'observer son signe. Le problème est que la calculatrice n'affiche pas directement la courbe, il faut lui donner des paramètres. En fait, il faut être capable de proposer à la calculatrice des paramètres d'affichages tels que ceux-ci.



Les paramètres en abscisse, c'est à dire x_{min} et x_{max} sont simples à obtenir, il suffit de prendre le domaine de définition, ici, $x_{min} = 0$ et $x_{max} = 1{,}75$.
Par contre nous n'avons pas les valeurs en ordonnée. Il suffit de demander à la calculatrice d'afficher des valeurs de y pour x compris entre 0 et 1,75. Il faut aller dans la partie fonction 

de la calculatrice.

Il faut ensuite taper la fonction dérivée.



Attention aux erreurs de saisie, pour la puissance prenons l'habitude d'utiliser la touche 

qui est la touche puissance de la calculatrice. Une deuxième source d'erreur est l'utilisation du – de la calculatrice.
Rappels: Lorsque l'on écrit un nombre négatif et que ce nombre est seul comme - 5, il faut utiliser le 

, lorsqu'il s'agit d'une opération comme 5 – 3, il faut utiliser 

.

Afin d'obtenir un tableau de valeurs, il faut indiquer à la calculatrice que le tableau doit afficher des valeurs comprises entre 0 et 1,75. Il faudra aussi préciser le pas, c'est à dire l'espace entre chaque valeur, si nous laissons 1, il n'y aura que 2 valeurs: 0 et 1. Nous prendrons un pas de 0,1 et de ce fait des valeurs de x comprises entre 0 et 1,8. Pour ce faire appuyons sur 

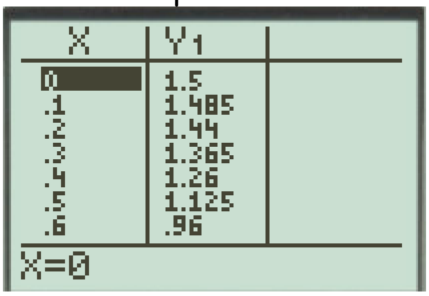
pour faire apparaître les paramètres de 

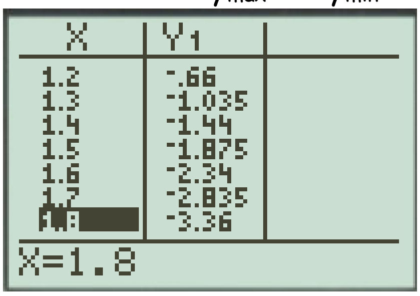
.

Contrairement à la casio, la T.I. ne propose pas de valeur finale. On lance alors “table” 

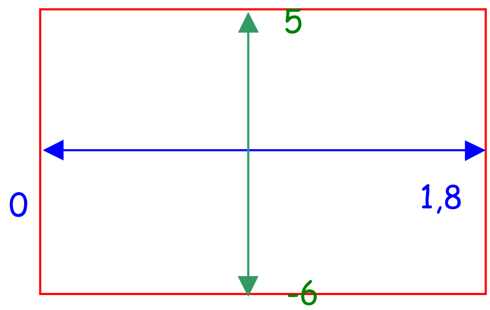
.

Il nous est possible alors d'obtenir les valeurs y_{max} et y_{min}. Celles-ci sont

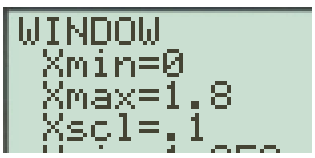


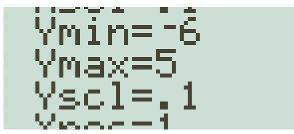
et


Ces deux valeurs nous permettrons d'établir les paramètres en ordonnée de la courbe. Il faut savoir que la calculatrice donne des informations par le biais de son écran et nous devons en tenir compte, c'est pourquoi nous augmenterons y_{max} en ajoutant quelques unités et nous diminuerons y_{min} en enlevant quelques unités.
Prenons pour y_{max} qui était de 1,5 la valeur 5, et pour y_{min} qui était de -3,36 la valeur -6.
Voici nos paramètres d'affichage de l'écran.



On lance alors 

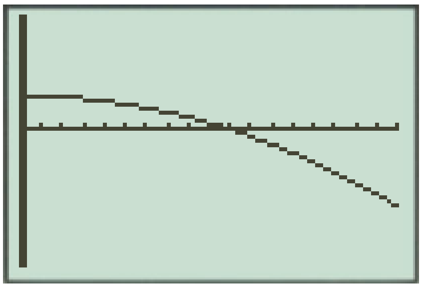
et on tape 

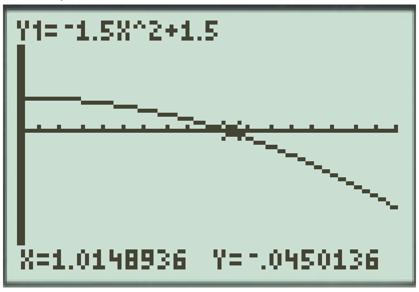
et 

, on peut

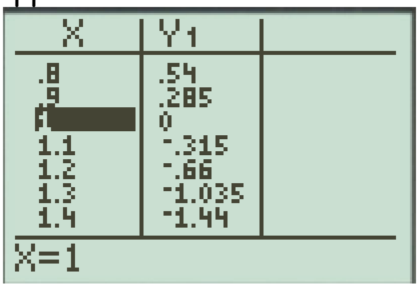
faire apparaître le graphique en tapant 

.

La courbe obtenue est la suivante: 

Le signe de la dérivée est alors évident, il suffit de déterminer la valeur qui annule la dérivée en lançant trace . 

Le résultat n'est malheureusement pas précis. On peut penser que la valeur de x pour laquelle y = 0 est 1, on pourra le vérifier en refaisant apparaître le tableau.



A partir de cette courbe, il est facile de compléter le signe de la dérivée.

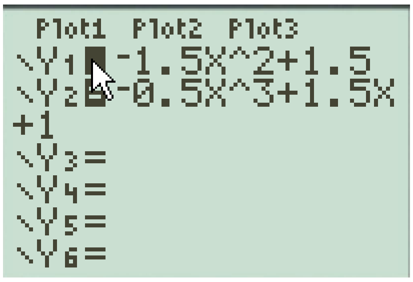
x	0		1		1,75
Signe de f'(x)		+	0	-	

Le signe de la dérivée nous indique que la fonction est croissante si celui-ci est positif et décroissante s'il est négatif.

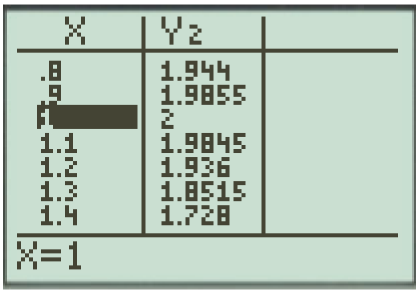
x	0		1		1,75
Signe de f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗		↘	

Il nous reste à déterminer les valeurs aux bornes de la fonction f(x). Il suffit d'écrire la fonction sur la calculatrice en tapant 

.



Ensuite pour ne pas être ennuyer à l'affichage du tableau de désélectionner la fonction dérivée. Il suffit de se placer sur le "=" et d'appuyer sur 

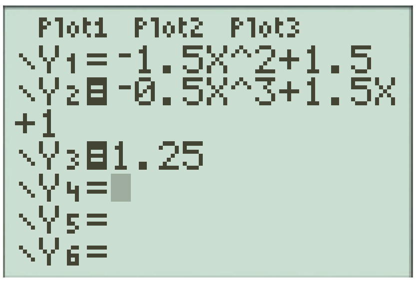


Avec ce tableau, on peut facilement compléter le tableau de variation.

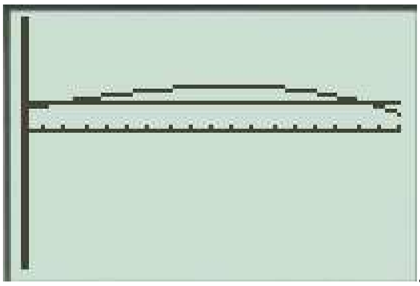
x	0		1		1,75
Signe de f'(x)		+	0	-	
f(x)	1	↗	2	↘	0,95

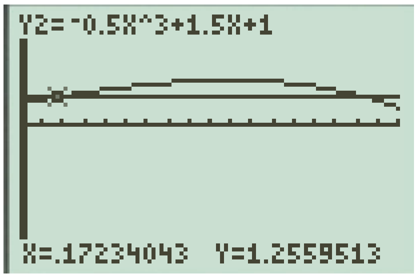
On peut alors répondre à la question: " A quel moment est-on en hyperglycémie ?"
On est en hyperglycémie lorsque la glycémie est supérieure à 1,25 g/L. La valeur de y ne doit pas dépasser 1,25, on tape donc l'équation y = 1,25 dans la partie équation 

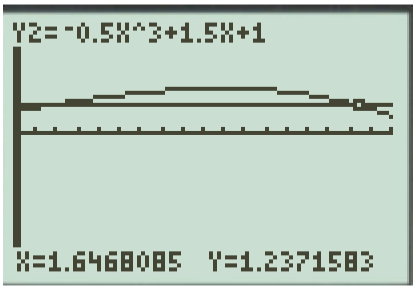
de la calculatrice.



On en profite pour s'assurer que seules la fonction initiale et la droite y = 1,25 sont sélectionnées.
Tous les paramètres étant dans la calculatrice, on lance:

et on obtient . Pour déterminer les valeurs de x pour lesquelles la glycémie est de 1,25 g/L, il suffit de lancer trace 

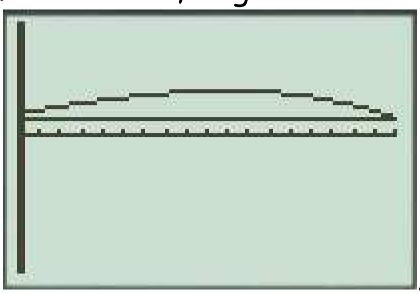
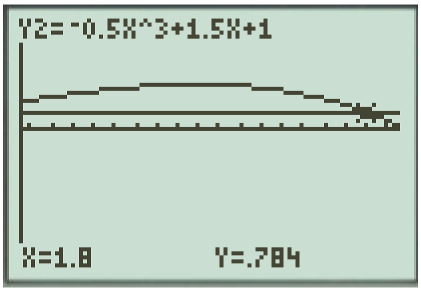
et de se déplacer à l'aide des touches  pour obtenir : 

et 

On est en hyperglycémie entre 0,17 h et 1,65 h

On peut également répondre à la question: " A quel moment est-on en hypoglycémie ?"

Il suffit de tranformer la droite y = 1,25 en y = 0,75 car on est en hypoglycémie si la glycémie inférieure à 0,75 g/L.

On obtient . 

La réponse est jamais entre 0 h et 1,75 h (vérification avec trace).